
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE EXPRESSÃO GRÁFICA
PET/MATEMÁTICA

CÔNICAS

2ª edição

PAULO HENRIQUE SIQUEIRA
ANTONIO MOCHON COSTA

UFPR
2012

Sumário

Capítulo 1

AS CÔNICAS CONSIDERADAS COMO SEÇÕES PLANAS NA SUPERFÍCIE CÔNICA DE REVOLUÇÃO

1.1. A SUPERFÍCIE CÔNICA DE REVOLUÇÃO.....	3
1.2. AS CÔNICAS CONSIDERADAS COMO SEÇÕES PLANAS NA SUPERFÍCIE CÔNICA DE REVOLUÇÃO.....	4
1.3. OS TEOREMAS DE APOLLONIUS E DE DANDELIN-QUETELET.....	5
1.4. PROBLEMAS	16

Capítulo 2

PROPRIEDADES GERAIS DAS CÔNICAS

2.1. EQUAÇÕES DAS CÔNICAS EM COORDENADAS CARTESIANAS.....	18
2.2. PROPRIEDADES DAS RETAS TANGENTES E NORMAIS ÀS CÔNICAS.....	21
2.3. PROPRIEDADES DA PARÁBOLA.....	24
2.4. PROPRIEDADES DAS CIRCUNFERÊNCIAS PRINCIPAIS DA ELIPSE E DA HIPÉRBOLE.....	25
2.5. ASSÍNTOTAS DA HIPÉRBOLE.....	27
2.6. DIÂMETROS CONJUGADOS.....	29
2.7. O TEOREMA DE PONCELET E SUAS CONSEQUÊNCIAS.....	38
2.8. PROBLEMAS.....	42

Capítulo 3

AS CÔNICAS VISTAS COMO RECÍPROCAS POLARES DA CIRCUNFERÊNCIA

3.1. INTRODUÇÃO.....	50
3.2. PÓLO E POLAR.....	50
3.3. RAZÃO HARMÔNICA.....	50
3.3.1. PROPRIEDADES DAS RAZÕES HARMÔNICAS.....	51
3.3.2. FEIXES HARMÔNICOS, ANARMÔNICOS E SUAS PROPRIEDADES.....	55
3.4. PROPRIEDADES E DEFINIÇÕES SOBRE PÓLO E POLAR.....	57
3.5. RECIPROCIDADE POLAR.....	61
3.6. AS CÔNICAS CONSIDERADAS COMO RECÍPROCAS POLARES DA CIRCUNFERÊNCIA.....	62
3.6.1. DEFINIÇÃO GERAL PARA CÔNICAS.....	65
3.7. PROBLEMAS.....	66

AS CÔNICAS CONSIDERADAS COMO SEÇÕES PLANAS NA SUPERFÍCIE CÔNICA DE REVOLUÇÃO

1.1. A SUPERFÍCIE CÔNICA DE REVOLUÇÃO

Sejam π um plano fixo e S um ponto pertencente ao mesmo. Considerando-se todas as retas pertencentes ao ponto S e que formam ângulo constante θ ($0^\circ < \theta < 90^\circ$) com o plano π , tem-se uma superfície cônica de revolução, onde as retas consideradas são as geratrizes da superfície.

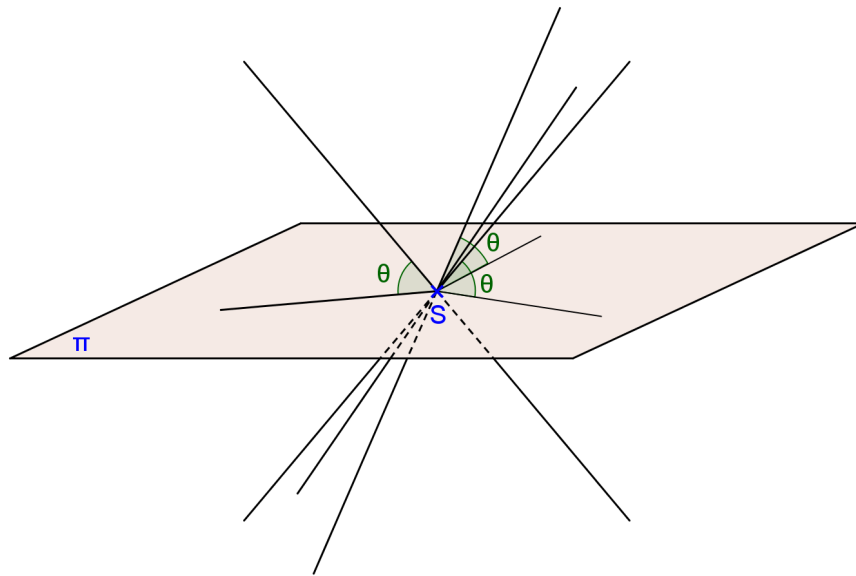


Figura 1.1 - Retas formando um mesmo ângulo θ com o plano π , passando pelo ponto S .

A reta normal ao plano π que contém o ponto S é chamada eixo da superfície cônica de revolução e S é o seu vértice.

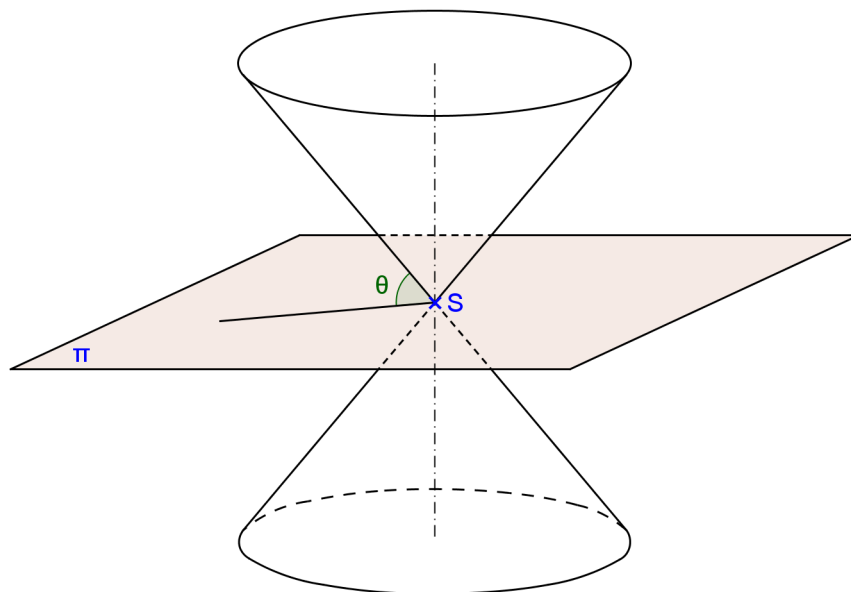


Figura 1.2 - Superfície Cônica de Revolução

O ângulo formado entre as geratrizes e o eixo da superfície cônica de revolução é de $90^\circ - \theta$. Deste modo, uma superfície cônica de revolução pode ser determinada por todas as retas que formam este ângulo com o eixo, não sendo, portanto, necessária a determinação do plano π .

1.2. AS CÔNICAS CONSIDERADAS COMO SEÇÕES PLANAS NUMA SUPERFÍCIE CÔNICA DE REVOLUÇÃO

Considerando-se planos que seccionam uma superfície cônica de revolução, sendo os mesmos não perpendiculares ao eixo da superfície, obtém-se as cônicas sobre a superfície cônica.

Seja β um plano de seção que forma um ângulo α com o plano π definido anteriormente, como mostra a Figura 1.3.

Se $\alpha < \theta$, onde θ é o ângulo definido anteriormente, então β seccionará somente uma das folhas da superfície cônica, determinando sobre esta uma curva fechada denominada **elipse**.

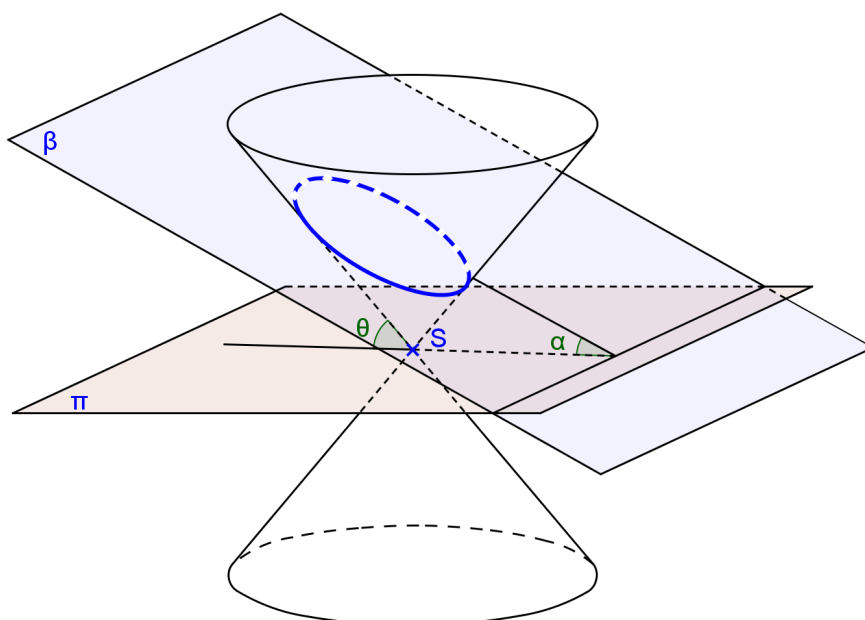


Figura 1.3 - Elipse: $\alpha < \theta$

No caso em que $\alpha > \theta$ e $\alpha \leq 90^\circ$, conforme mostra a Figura 1.4, o plano β seccionará as duas folhas da superfície cônica, definindo uma curva aberta de dois ramos denominada **hipérbole**.

Se $\alpha = \theta$, o plano β definirá sobre uma das folhas da superfície cônica uma curva aberta de um ramo, denominada **parábola** (figura 1.5).

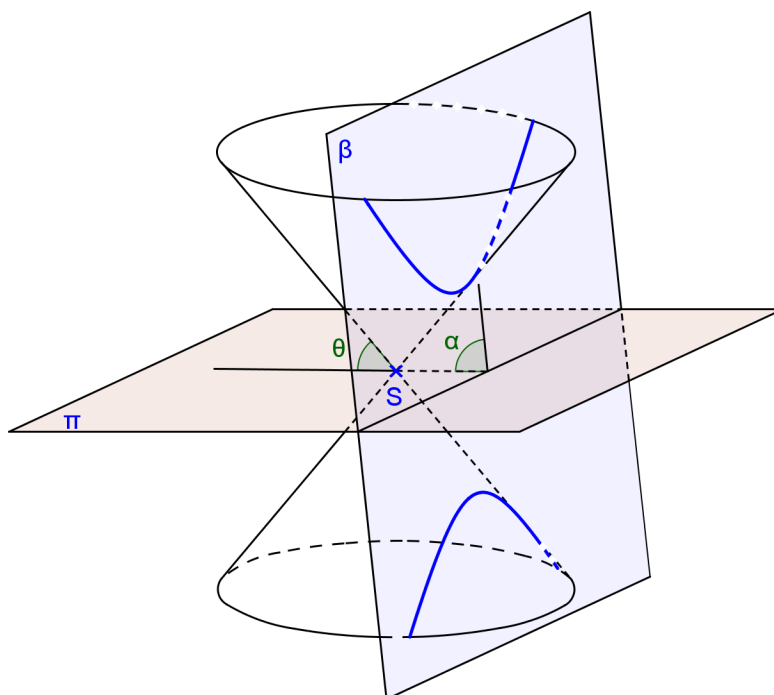


Figura 1.4 - Hipérbole: $\alpha > \theta$ e $\alpha \leq 90^\circ$

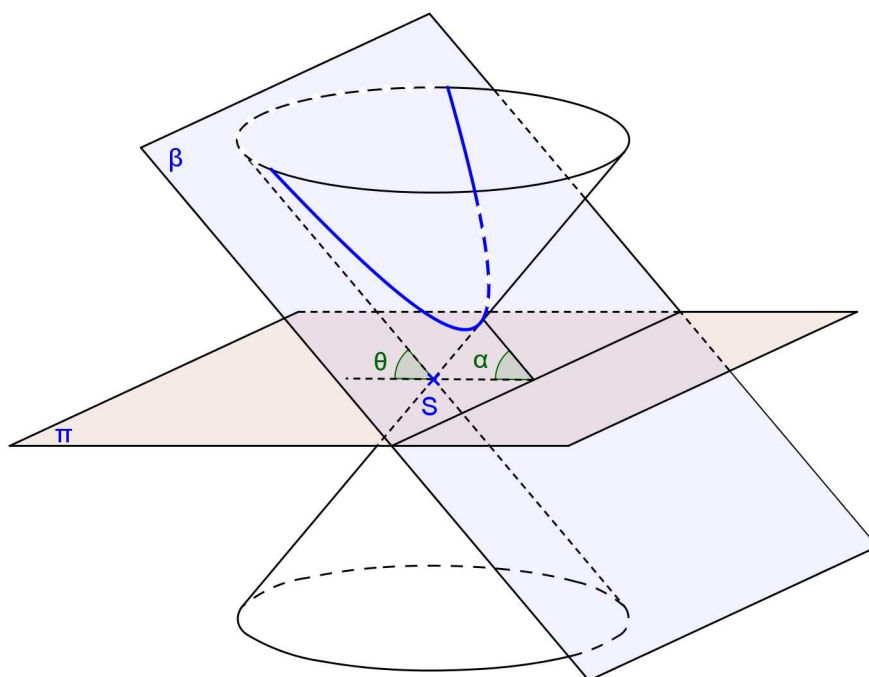


Figura 1.5 - Parábola: $\alpha = \theta$

Quando $\alpha = 0^\circ$, isto é, o plano β é paralelo ao plano π , este determinará sobre a superfície do cone uma circunferência ou se passar pelo vértice do cone, um ponto.

1.3. OS TEOREMAS DE APOLLONIUS E DE DANDELIN-QUETELET

Existem relações entre algumas distâncias nas cônicas envolvendo seus pontos. Essas relações são conseqüências do Teorema de Apollonius.

TEOREMA DE APOLLONIUS

A seção feita num cone por um plano qualquer é uma elipse, uma parábola ou uma hipérbole, segundo o plano secante faz com o eixo do cone um ângulo superior, igual ou inferior ao semi-ângulo no vértice do cone.

OBSERVAÇÃO

O referido ângulo do teorema acima trata-se do complementar do ângulo θ apresentado na seção 1.1.

Nesta seção será apresentada uma demonstração moderna, feita pelo matemático belga Germinal Pierre Dandelin e baseada nas esferas inscritas na superfície cônica de revolução que haviam sido utilizadas por Lambert Adolph Jacques Quetelet, outro matemático belga. O Teorema de Apollonius é apresentado por Dandelin da seguinte forma:

TEOREMA DE DANDELIN-QUETELET

A seção de um cone circular, por um plano tangente a uma esfera inscrita nesse cone, é uma cônica que tem foco no ponto de contato e para diretriz correspondente a interseção do plano secante com o plano da circunferência de contato da esfera e do cone.

Demonstração:**1º caso: elipse**

Sejam uma superfície cônica de revolução e um plano que seccione uma das folhas dessa superfície cortando todas as geratrizes, isto é, plano que forme com o eixo um ângulo maior que o semi-ângulo no vértice do cone, ou ainda o ângulo $\alpha < \theta$ como considerado na seção 1.2.

Tomando-se um plano perpendicular ao plano secante passando pelo eixo do cone para o plano da figura, tem-se que o mesmo corta a superfície cônica segundo duas geratrizes (figura 1.6).

Além disso, este plano corta o círculo da base segundo uma reta, a qual determina na circunferência dois pontos que são os pés das geratrizes do cone contidas no plano.

O plano da figura e o plano secante cortam-se segundo a reta A_1A_2 . Traçando-se a circunferência inscrita e a ex-inscrita ao triângulo A_1SA_2 entre as geratrizes do cone, estas tocam A_1A_2 nos pontos F_1 e F_2 . As esferas estão inscritas no cone e são tangentes ao plano secante nos pontos F_1 e F_2 .

O contato da esfera de centro O com o cone é o círculo que tem diâmetro DD' , cujo plano é perpendicular ao plano da figura. Da mesma maneira, a esfera de centro O' tangencia o cone segundo um círculo de diâmetro EE' e cujo plano é também perpendicular ao da figura.

Escolhendo-se um ponto P qualquer sobre a curva de seção, traçam-se as retas PF_1 e PF_2 e a geratriz SP que corta em L e L' os paralelos DD' e EE' . O segmento PF_1 é igual a PL' como tangentes a uma esfera traçadas do mesmo ponto. Pelo mesmo motivo, tem-se $PF_2 = PL$.

Observando-se que a curva de seção está entre os planos DLD' e $EL'E'$, de tal modo que P fica compreendido entre L e L' , pode-se concluir que:

$$2p = SA_2 + A_2F_1 + A_1F_1 + A_1S$$

porém,

$$A_2F_1 = A_2E \text{ e } A_1F_1 = A_1E'$$

como tangentes traçadas do mesmo ponto à superfície da esfera de centro O' . Substituindo-se A_2F_1 e A_1F_1 , obtém-se:

$$2p = SA_2 + A_2E + A_1S + A_1E'$$

ou

$$2p = SE + SE'.$$

Como $SE = SE'$, tem-se

$$2p = 2SE \text{ ou } p = SE. \quad (3)$$

Substituindo na fórmula (2) p pelo seu valor SE , vem:

$$A_1A_2 = SE - SD;$$

ora,

$$SE - SD = ED; \text{ logo, } A_1A_2 = DE$$

e substituindo-se em (1), tem-se:

$$PF_1 + PF_2 = A_1A_2$$

que representa a lei de geração da elipse. Esta é a relação existente entre os pontos da elipse e é uma consequência imediata do teorema de Apollonius.

Assim uma elipse pode ser definida do seguinte modo:

DEFINIÇÃO

Elipse é o lugar geométrico dos pontos do plano cuja soma das distâncias a dois pontos fixos F_1 e F_2 do mesmo plano é uma constante A_1A_2 .

Os pontos F_1 e F_2 são denominados focos e A_1 e A_2 são vértices da elipse (figura 1.7). Além disso, A_1A_2 é chamado eixo maior ou eixo focal, e os pontos da elipse que estão na perpendicular a este eixo (B_1 e B_2), passando pelo centro O , são denominados pólos da elipse. Assim, B_1B_2 será o eixo menor ou eixo não focal da elipse.

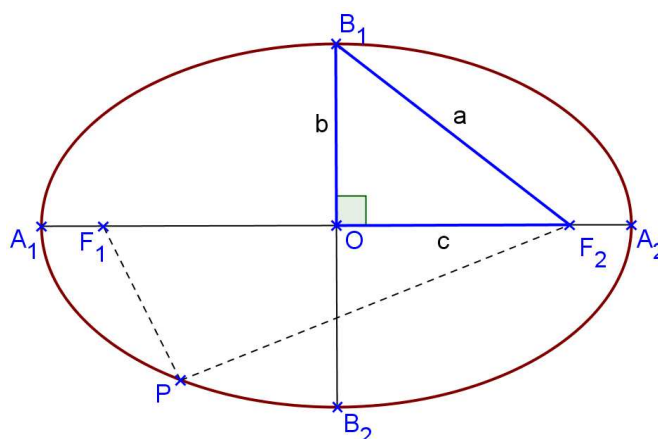


Figura 1.7 - Elipse

A distância focal F_1F_2 será tratada de agora em diante por $2c$, assim como B_1B_2 será $2b$ e o eixo maior A_1A_2 será $2a$.

Como o pólo B_1 pertence à elipse, tem-se que

$$B_1F_1 + B_1F_2 = 2a.$$

Mas os triângulos B_1F_1O e B_1F_2O são congruentes (pelo caso LAL), então $B_1F_1 = B_1F_2$.

Logo,

$$2B_1F_1 = 2a,$$

então tem-se que :

$$B_1F_1 = B_1F_2 = a.$$

Portanto, na elipse tem-se o triângulo retângulo B_1F_2O , cujos catetos são b e c , e a hipotenusa é a . O mesmo vale para o outro pólo B_2 .

Deste modo, na elipse vale a seguinte propriedade:

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

As circunferências diretrizes da elipse são duas. O raio será $2a$ e o centro em um dos focos. Seja γ_1 a circunferência diretriz de centro F_1 e raio $2a$ (figura 1.8). Traçando-se um raio qualquer F_1S_2 , tem-se que:

$$F_1P + PS_2 = 2a \text{ (por definição da circunferência diretriz)}$$

$$F_1P + PF_2 = 2a \text{ (por definição de elipse)}$$

portanto,

$$PS_2 = PF_2$$

o que sugere o traçado de uma circunferência de centro P e raio $PF_2 = PS_2$ (figura 1.8), tendo assim as seguintes propriedades:

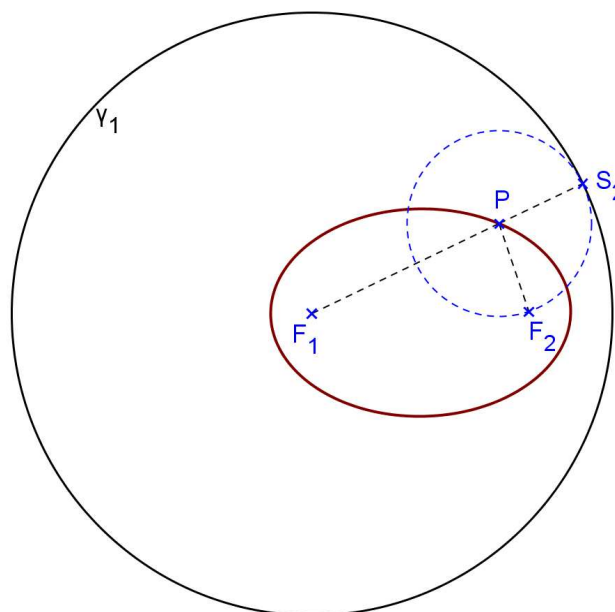


Figura 1.8 - Circunferência diretriz γ_1 da elipse

1. passa pelo foco F_2 ;

2. tem centro em P, ponto da elipse;
3. é tangente à circunferência diretriz, pois F_1 , P e S_2 estão alinhados.

Assim, uma nova definição para elipse surge como consequência da anterior:

DEFINIÇÃO

Elipse é o lugar geométrico dos centros (P) das circunferências tangentes a uma circunferência dada (ou seja, a circunferência diretriz) e que passam ainda por um ponto interno à circunferência dada (F_2).

Como F_2 pode ser considerado uma circunferência de raio nulo, pode-se generalizar esta definição para o caso em que F_2 é uma circunferência de raio não nulo e, obviamente, menor que $2a$.

As propriedades destas definições serão tratadas no capítulo 2.

TEOREMA

A seção plana em um cilindro reto por um plano oblíquo ao eixo é uma elipse.

Demonstração:

Considerando-se o plano de seção β e as esferas inscritas no cilindro (figura 1.9), tangenciando β em F_1 e F_2 , e um ponto P qualquer da curva obtém-se que:

$$MM' = NN',$$

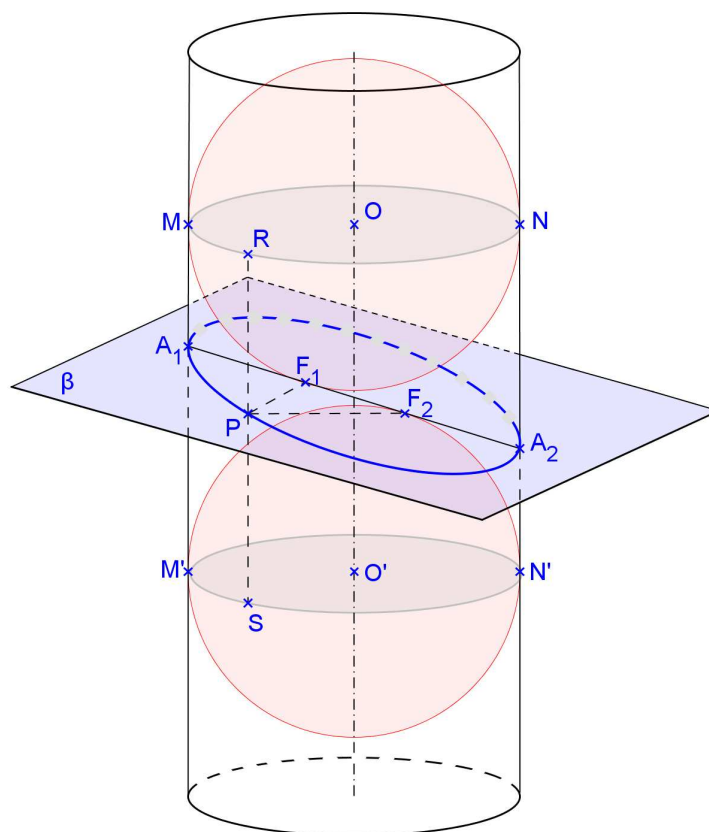


Figura 1.9 - Seção plana em um cilindro circular reto

pois são pontos de tangência de esferas com o mesmo raio do cilindro.

Determinando-se as retas tangentes às esferas que passam por P e são paralelas ao eixo do cilindro, obtém-se os segmentos PR e PS. Como R e S são pontos de tangência destas esferas tem-se:

$$PR + PS = MM' = NN'.$$

Como PF_1 e PR são tangentes à esfera de centro O e PF_2 e PS são tangentes à esfera de centro O' , tem-se que:

$$PF_1 = PR \text{ e } PF_2 = PS.$$

Logo,

$$PR + PS = PF_1 + PF_2 = MM' = NN'.$$

Como A_1F_1 e A_1M são tangentes à esfera de centro O, então:

$$A_1F_1 = A_1M.$$

Analogamente, têm-se as seguintes igualdades:

$$A_2F_1 = A_2N, A_1F_2 = A_1M' \text{ e } A_2F_2 = A_2N'.$$

Logo,

$$MM' = A_1M + A_1M' = A_1F_1 + A_1F_2 = A_1F_1 + A_2F_1 = A_1A_2,$$

ou seja,

$$PF_1 + PF_2 = A_1A_2.$$

2º caso: hipérbole

Voltando à demonstração do Teorema de Dandelin-Quetelet, admite-se agora que o plano secante corta as geratrizes das duas folhas da superfície cônica (figura 1.10), ou seja, toma-se um plano que forme um ângulo $\alpha > \theta$ como considerado na seção 1.2. Obtém-se sobre o cone a cônica denominada hipérbole.

Observando-se a figura 1.10, conclui-se que:

$$PF_2 - PF_1 = PG' - PG = GG' = BB' = \text{constante},$$

pois são tangentes a mesmas esferas por um mesmo ponto.

Tem-se:

$$BB' = A_1B' - A_1B = A_1F_2 - A_1F_1$$

pois

$$A_1B = A_1F_1 \text{ e } A_1B' = A_1F_2$$

por serem tangentes a uma esfera por um mesmo ponto. Além disso,

$$BB' = CC' = A_2C - A_2C' = A_2F_1 - A_2F_2$$

pois

$$A_2C = A_2F_1 \text{ e } A_2C' = A_2F_2.$$

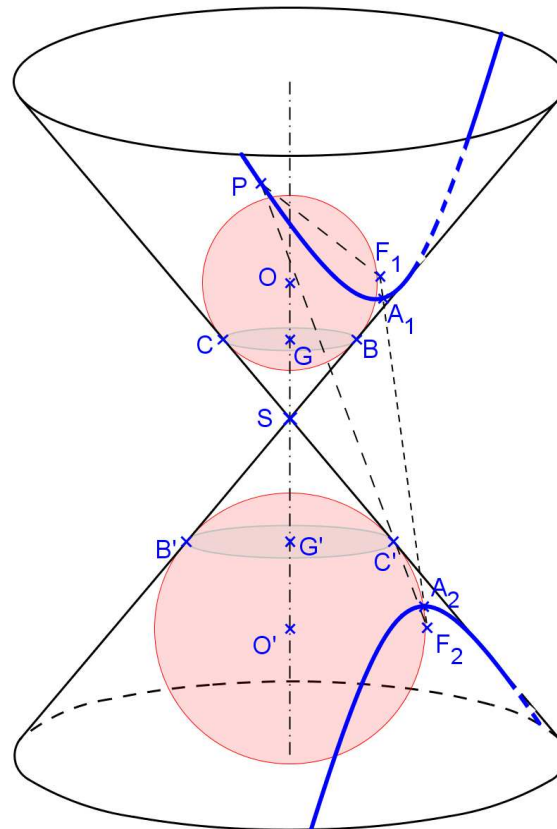


Figura 1.10 - Seção Hiperbólica

Donde

$$BB' = CC' = A_1F_2 - A_1F_1 = A_2F_1 - A_2F_2.$$

Além disso,

$$BB' = CC' = A_2C - A_2C' = A_2F_1 - A_2F_2.$$

Desta identidade, conclui-se que:

$$A_1F_1 = A_2F_2 \text{ e } A_1F_2 = A_2F_1,$$

por serem segmentos iguais de sinais contrários. E, finalmente,

$$A_2F_1 - A_1F_2 = A_1F_2 - A_2F_2 = BB' = A_1A_2.$$

Portanto,

$$PF_2 - PF_1 = A_1A_2.$$

As interseções dos planos dos paralelos BC e B'C' com o plano secante são as retas diretrizes da hipérbole. Esta é a lei de geração da hipérbole, consequência imediata do Teorema de Apollonius. Esta lei apresenta uma relação entre os pontos da hipérbole, a qual pode ser definida como segue:

DEFINIÇÃO

Hipérbole é o lugar geométrico dos pontos do plano cuja diferença das distâncias a dois pontos fixos F_1 e F_2 do mesmo plano é uma constante A_1A_2 (figura 1.11).

O segmento A_1A_2 será o eixo real, F_1 e F_2 serão os focos e A_1 e A_2 os vértices da hipérbole. Tomando-se a perpendicular ao eixo real A_1A_2 que passa pelo centro da hipérbole, e construindo-se o

triângulo retângulo A_1B_2O , cuja hipotenusa mede c e o cateto OA_1 mede a , tem-se os segmentos $B_2O = B_1O = b$, sendo B_1B_2 o eixo imaginário da hipérbole.

A mesma propriedade do eixo imaginário pode ser encontrada usando-se o vértice A_1 e construindo-se o triângulo retângulo A_2B_2O .

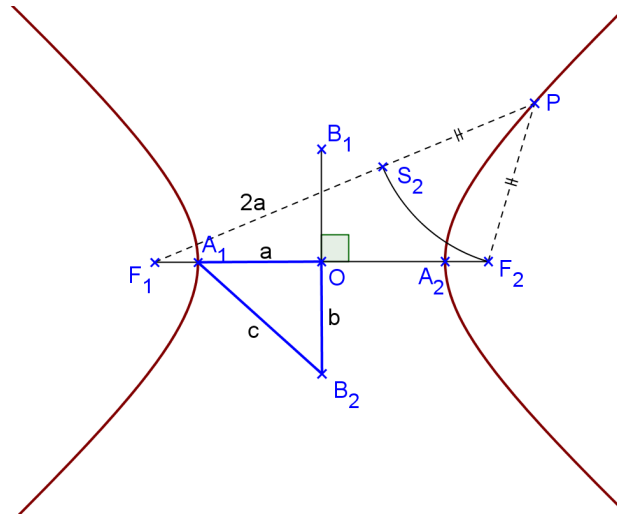


Figura 1.11 - Hipérbole

Portanto, na hipérbole vale a seguinte propriedade:

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

As circunferências diretrizes da hipérbole têm raio $2a$ e centro em um de seus focos.

Seja γ_1 uma circunferência de centro F_1 e raio $2a$. Tomando-se um raio qualquer F_1S_2 de γ_1 , que corta um dos ramos da hipérbole em P , tem-se:

$$PF_1 - PS_2 = 2a \text{ (definição de circunferência diretriz)}$$

$$PF_1 - PF_2 = 2a \text{ (definição de hipérbole),}$$

logo,

$$PS_2 = PF_2$$

o que sugere o traçado de uma circunferência de centro P e raio $PS_2 = PF_2$, que passa por F_2 e é tangente externamente à γ_1 (figura 1.12).

Analogamente, prova-se que $P'S'_2 = P'F_2$, onde P' é um ponto pertencente ao outro ramo da hipérbole, traçando-se uma circunferência de centro P' e raio $P'S'_2 = P'F_2$, que passa pelo foco F_2 e é tangente internamente à γ_1 .

Uma nova definição de hipérbole surge como consequência da anterior:

DEFINIÇÃO

Hipérbole constitui o lugar geométrico dos centros (P e P') das circunferências tangentes internamente (um ramo) e externamente (outro ramo) a uma circunferência dada (a circunferência diretriz) e que passam, ainda, por um ponto externo à circunferência dada (F_2).

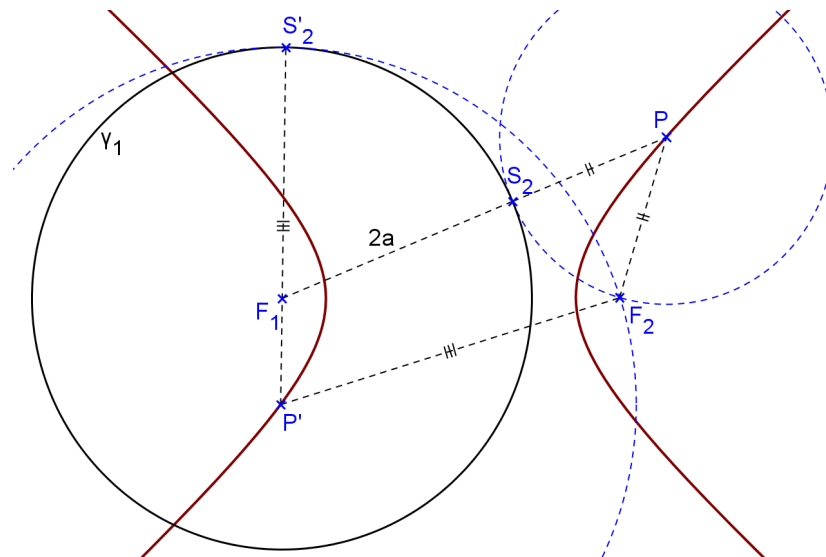


Figura 1.12 - Circunferência diretriz da hipérbole

Generalizando, pode-se tomar como foco uma circunferência de raio não nulo e com centro em um ponto próprio, obtendo-se do mesmo modo uma hipérbole usando-se a definição dada acima.

As propriedades desta definição para hipérbole serão tratadas no próximo capítulo.

3º caso: parábola

Agora, dando prosseguimento à demonstração do Teorema de Dandelin-Quetelet, admite-se que o plano secante seja paralelo a uma das geratrizes da superfície cônica, ou $\alpha = \theta$ como foi considerado na seção 1.2. Obtém-se sobre o cone a cônica denominada parábola.

Traçando-se o plano LSL' perpendicular ao plano secante, SL' será a geratriz paralela a este plano. O traço do plano secante no plano LSL' será A_2F_2 (figura 1.13).

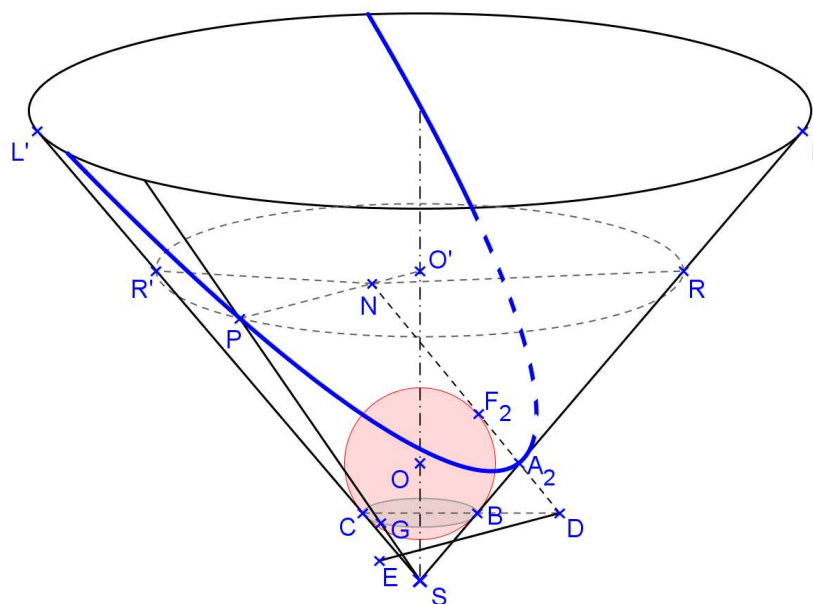


Figura 1.13 - Seção Parabólica

Construindo-se no plano LSL' a circunferência de centro O , tangente às geratrizes principais em B e em C e à reta A_2F_2 no ponto F_2 e girando-se a figura em torno do eixo OS , a esfera descrita pela circunferência de centro O será tangente ao cone segundo o paralelo BC e toca em F_2 o plano secante.

Tome um ponto qualquer P sobre a curva de seção. Traça-se, então, a reta PF_2 e a geratriz SP que corta em G o paralelo BC da superfície do cone. Igualmente, traça-se o paralelo RR' do cone que passa por P e intercepta o plano secante em PN , onde N pertence à reta A_2F_2 .

Tem-se sempre $PF_2 = PG$ como tangentes a uma esfera pelo mesmo ponto P . Verifica-se por uma rotação em torno do eixo do cone que $PG = BR$. A interseção do plano secante e do paralelo BC é uma reta DE , perpendicular ao plano LSL' e ND representa a distância do ponto P à reta DE .

Como os triângulos A_2NR e A_2BD são isósceles e ambos semelhantes ao triângulo SLL' , conclui-se que $ND = BR$; isto é, $PF_2 = ND$ e conseqüentemente,

$$PF_2 = PE.$$

Esta é a relação que determina a parábola que tem DE como reta diretriz, F_2 como foco e A_2 como vértice.

A relação encontrada permite que se possa definir a parábola como segue:

DEFINIÇÃO

Parábola é o lugar geométrico dos pontos do plano equidistantes de uma reta γ e de um ponto F_2 , não pertencente à reta, no plano dado (figura 1.14).

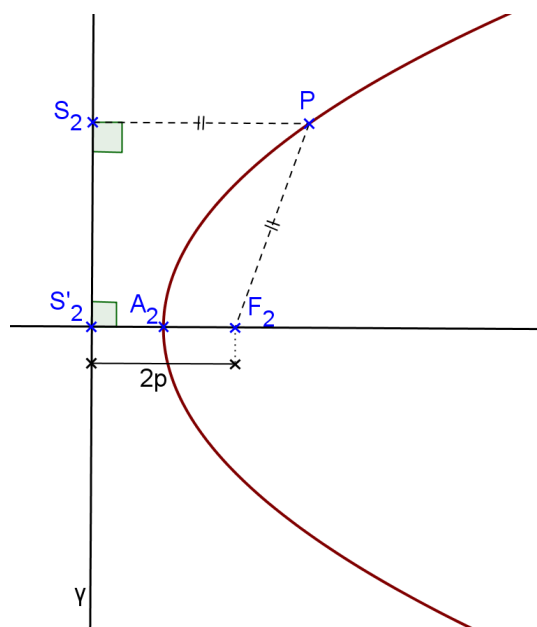


Figura 1.14 - Parábola

A reta γ será a diretriz da parábola, F_2 será o seu foco, A_2 seu vértice e a reta perpendicular à diretriz que contém o foco é denominada eixo. A distância do foco F_2 até a reta diretriz é denominada parâmetro da parábola e é denotado por $F_2S'_2 = 2p$.

O fato de que $PF_2 = PS_2$ e $PS_2 \perp \gamma$ sugerem o traçado de uma circunferência de centro P e raio PF_2 , que passa por F_2 e é tangente à diretriz γ (figura 1.15).

Tem-se, assim, uma nova definição para parábola, qual seja:

DEFINIÇÃO

Parábola é o lugar geométrico dos centros (P) das circunferências tangentes a uma reta dada (γ) e que passam por um ponto dado (F_2) não pertencente à reta dada.

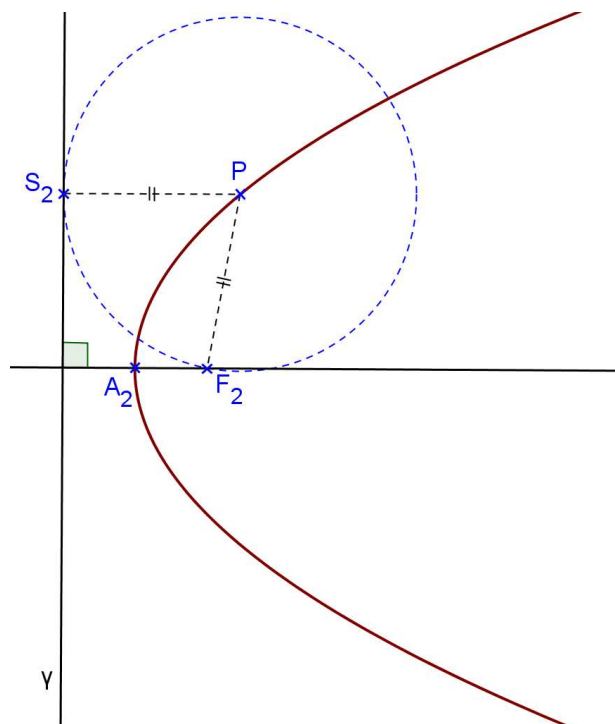


Figura 1.15 - Reta diretriz da parábola

Generalizando, o foco pode ser considerado como uma circunferência de raio não nulo e que tenha centro próprio, obtendo-se do mesmo modo a parábola com a definição acima.

Encerra-se assim a demonstração do teorema de Dandelin-Quetelet. Cabe agora um tratamento adequado para as cônicas, utilizando as definições colocadas anteriormente, estabelecendo suas propriedades e utilizando-as na resolução de problemas.

1.4. PROBLEMAS

Construir uma elipse ou uma hipérbole, dados os cinco elementos:

1. a, c.
2. a, b.
3. b, c.
4. a excentricidade $e = \frac{c}{a}$, a.

5. e, c.
6. F_1 , F_2 e um ponto P pertencente à cônica.
7. O, F_1 e um ponto P pertencente à cônica.
8. F_2 , os pontos P e P' e o comprimento $2a$.

Solução: Encontrar a interseção (F_1) das circunferências de centros P e P' , e de raios $2a - PF_2$ e $2a - P'F_2$.

9. B_1 , F_2 e um ponto P pertencente à cônica.

Solução: Encontrar a interseção (F_1) das circunferências $\alpha(B_1, a)$ e $\beta(P, 2a - PF_2)$.

Construir uma parábola, dados quatro elementos:

10. A_2 e F_2 .
11. o eixo, A_2 e $2p$.
12. F_2 e os pontos P e P' .

Solução: A diretriz γ é a reta tangente às circunferências $\alpha(P, PF_2)$ e $\beta(P', P'F_2)$.

13. a reta diretriz γ e os pontos P e P' .

Solução: O ponto F_2 é a interseção das circunferências $\alpha(P, PF'_2)$ e $\beta(P', PF''_2)$.

2.1. EQUAÇÕES DAS CÔNICAS EM COORDENADAS CARTESIANAS

Elipse

Seja P um ponto da elipse de diâmetros 2a e 2b com o centro na origem de um sistema de coordenadas cartesianas (figura 2.1). Por definição, se P pertence à elipse então:

$$PF_1 + PF_2 = 2a. \tag{4}$$

Mas as distâncias entre P e os focos F_1 e F_2 são:

$$PF_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \text{ e } PF_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}. \tag{5}$$

Substituindo (5) em (4), obtém-se:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a,$$

ou seja,

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}. \tag{6}$$

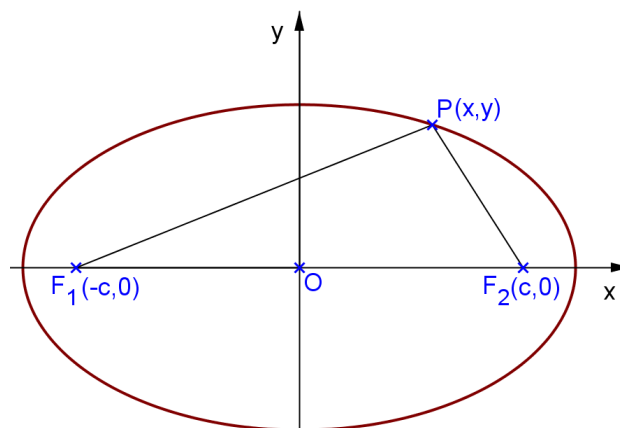


Figura 2.1 - Elipse

Elevando-se ambos os membros de (6) ao quadrado, tem-se:

$$\begin{aligned} (x+c)^2 + y^2 &= 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2 \\ \therefore x^2 + 2xc + c^2 + y^2 &= 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2xc + c^2 + y^2. \end{aligned}$$

Simplificando-se a última igualdade, tem-se:

$$\begin{aligned} 4a\sqrt{x^2 - 2xc + c^2 + y^2} &= 4a^2 - 4xc \\ \therefore a\sqrt{x^2 - 2xc + c^2 + y^2} &= a^2 - xc. \tag{7} \end{aligned}$$

Elevando-se ao quadrado ambos os membros de (7), tem-se:

$$a^2(x^2 - 2xc + c^2 + y^2) = a^4 - 2a^2xc + x^2c^2$$

$$\therefore a^2x^2 - 2a^2xc + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - 2a^2xc + x^2c^2. \quad (8)$$

Simplificando-se (8), obtém-se:

$$a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 + x^2c^2$$

$$\therefore a^2x^2 - x^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2$$

$$\therefore (a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2). \quad (9)$$

Como na elipse vale a relação $a^2 = b^2 + c^2$, pode-se substituir em (9) $a^2 - c^2$ por b^2 :

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2. \quad (10)$$

Dividindo ambos os membros de (10) por a^2b^2 , obtém-se:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

que é a equação da elipse de diâmetros a e b , com o centro na origem do sistema de coordenadas cartesianas.

Hipérbole

Seja um ponto P sobre a hipérbole de diâmetros $2a$ e $2b$, com o centro na origem do sistema de coordenadas cartesianas (figura 2.2). Por definição, se P pertence à hipérbole, então:

$$PF_1 - PF_2 = 2a. \quad (11)$$

Mas as distâncias entre P e os focos F_1 e F_2 são:

$$PF_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \text{ e } PF_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}. \quad (12)$$

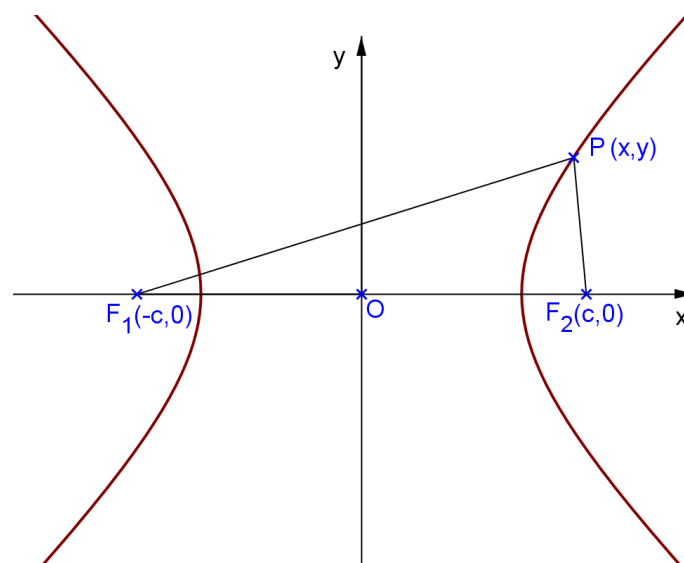


Figura 2.2 - Hipérbole

Substituindo (12) em (11), obtém-se:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a,$$

ou seja,

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}. \quad (13)$$

Elevando-se ambos os membros de (13) ao quadrado, tem-se:

$$x^2 + 2xc + c^2 + y^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2xc + c^2 + y^2.$$

Simplificando-se a última igualdade, tem-se:

$$4a\sqrt{x^2 - 2xc + c^2 + y^2} = 4xc - 4a^2$$

$$\therefore a\sqrt{x^2 - 2xc + c^2 + y^2} = xc - a^2. \quad (14)$$

Elevando-se ao quadrado ambos os membros de (14), tem-se:

$$a^2(x^2 - 2xc + c^2 + y^2) = x^2c^2 - 2a^2xc + a^4$$

$$\therefore a^2x^2 - 2a^2xc + a^2c^2 + a^2y^2 = x^2c^2 - 2a^2xc + a^4. \quad (15)$$

Simplificando-se (15), obtém-se:

$$x^2c^2 - a^2x^2 - a^2y^2 = a^2c^2 - a^4$$

$$\therefore (c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2). \quad (16)$$

Como na hipérbole vale a relação $c^2 = a^2 + b^2$, pode-se substituir em (16) $c^2 - a^2$ por b^2 :

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2. \quad (17)$$

Dividindo ambos os membros de (17) por a^2b^2 , obtém-se:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

que é a equação da hipérbole de diâmetros a e b , com o centro na origem do sistema de coordenadas cartesianas.

Parábola

Seja um ponto P sobre a parábola de foco F_2 e diretriz γ , com o vértice na origem do sistema de coordenadas cartesianas e o eixo coincidente com o eixo x (figura 2.3). Por definição, se P pertence à parábola, então:

$$PF_2 = \text{dist}(P, \gamma) = PS_2. \quad (18)$$

Mas as distâncias entre P e F_2 e entre P e γ são dadas por:

$$PF_2 = \sqrt{(x-p)^2 + y^2} \text{ e } \text{dist}(P, \gamma) = x + p \quad (19)$$

Substituindo (19) em (18) obtém-se:

$$x + p = \sqrt{(x-p)^2 + y^2} \quad (20)$$

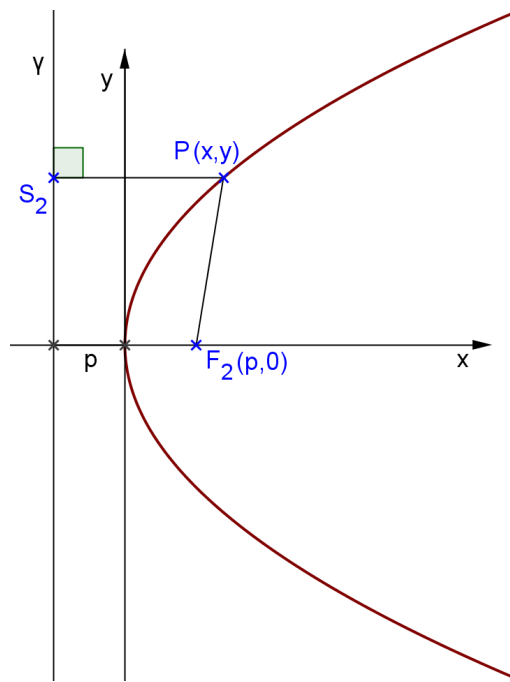


Figura 2.3 - Parábola

Elevando-se ao quadrado ambos os membros da equação (20) obtém-se:

$$(x + p)^2 = (x - p)^2 + y^2$$

$$\therefore x^2 + 2xp + p^2 = x^2 - 2xp + p^2 + y^2.$$

Simplificando a equação acima, obtém-se:

$$2xp = -2xp + y^2$$

$$\therefore y^2 = 4xp$$

que é a equação da parábola com o vértice na origem e o eixo coincidente com o eixo x.

2.2. PROPRIEDADES DAS RETAS TANGENTES E NORMAIS ÀS CÔNICAS

DEFINIÇÃO

As retas que têm somente um ponto em comum com uma cônica e que não contém pontos interiores da mesma são denominadas tangentes à cônica.

TEOREMA

A bissetriz do ângulo formado por um dos raios vetores de um ponto P da cônica e o prolongamento do outro raio vetor é a tangente à cônica no ponto P.

Demonstração:

Seja t a bissetriz do $\angle F_2PF'_2$ e fazendo-se $PF_2 = PF'_2$ (figura 2.4) obtém-se que:

$$PF_1 + PF_2 = 2a$$

$$PF_1 + PF'_2 = 2a.$$

Ou seja,

$$F_1F'_2 = 2a.$$

Seja um ponto M pertencente à reta t, distinto de P. Como $\Delta MPF_2 = \Delta MPF'_2$ (caso LAL), obtém-se que

$$MF_2 = MF'_2. \quad (21)$$

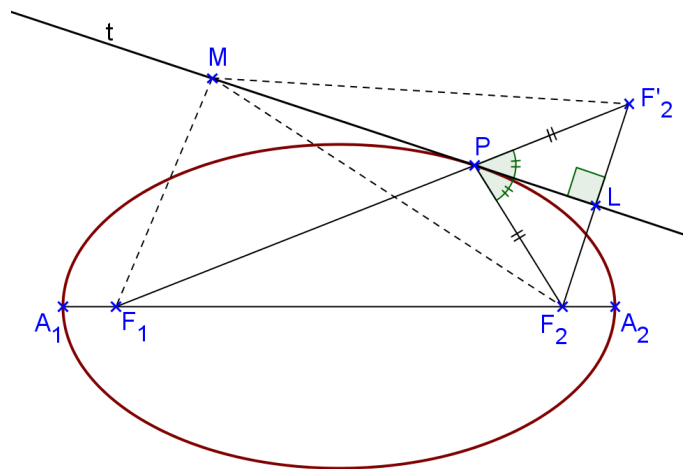


Figura 2.4 - Elipse

1º caso: elipse

A soma das medidas de dois lados de um triângulo é sempre maior que a medida do terceiro. Logo, no $\Delta MF_1F'_2$ tem-se:

$$MF_1 + MF'_2 > F_1F'_2 = 2a$$

Logo, devido a (21),

$$MF_1 + MF_2 > 2a$$

Isto prova que o ponto M não pertence ao lugar geométrico da elipse. Logo, o único ponto de t pertencente à elipse é P, o que indica t ser tangente à elipse em P.

2º caso: hipérbole

A diferença das medidas de dois lados é menor do que a medida do terceiro (figura 2.5). Logo, no $\Delta MF_1F'_2$, tem-se:

$$|MF_1 - MF'_2| < F_1F'_2 = 2a.$$

Portanto, devido a (21),

$$|MF_1 - MF_2| < 2a.$$

Consequentemente, M não pertence ao lugar geométrico da hipérbole. Assim, o único ponto de t pertencente à elipse é P, provando que t é tangente à hipérbole.

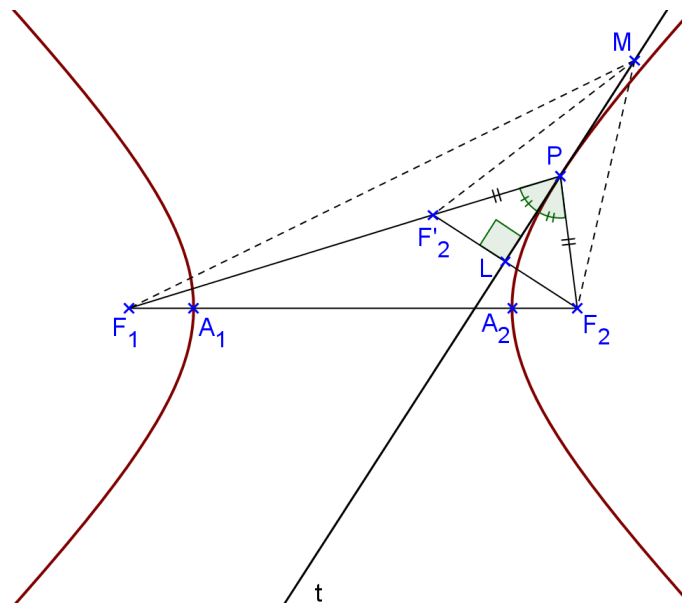


Figura 2.5 - Hipérbole

3º caso: parábola

Seja um ponto P pertencente à parábola (figura 2.6). Logo,

$$PF_2 = PF'_2.$$

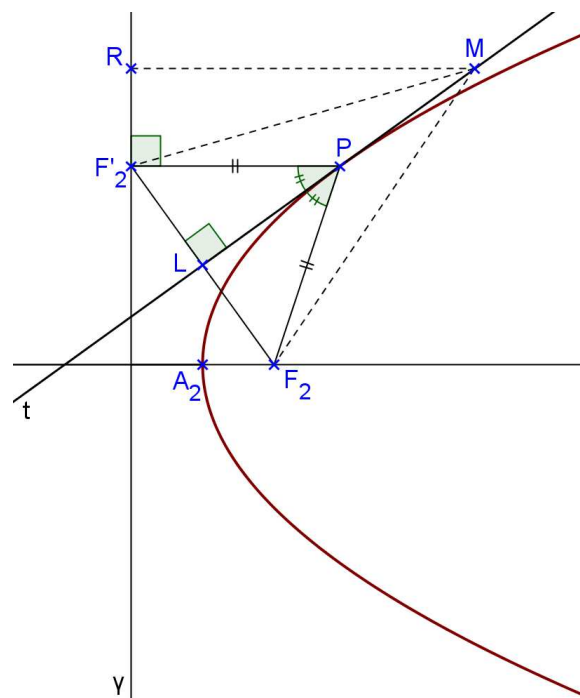


Figura 2.6 - Parábola

Seja M um ponto pertencente à reta t, distinto de P. Pelo caso LAL, tem-se que $\Delta F_2PM = \Delta F'_2PM$. Assim,

$$MF_2 = MF'_2. \quad (22)$$

Tomando-se a distância do ponto M à diretriz γ , obtém-se sobre a mesma um ponto R. No $\Delta MF'_2R$, tem-se que $MF'_2 > MR$ (MF'_2 é hipotenusa do triângulo retângulo).

Mas, por (22), obtém-se que

$$MF_2 > MR,$$

provando que M não pertence à parábola. Assim, P será o único ponto pertencente à parábola e pertencente à reta t. Portanto, t será a tangente à parábola passando pelo ponto P.

OBSERVAÇÕES

1. Pela congruência dos triângulos PLF_2 e PLF'_2 , conclui-se que F'_2 é simétrico de F_2 em relação à tangente t.
2. Como $F_1F'_2 = 2a$, conclui-se que F'_2 pertence à circunferência diretriz de centro F_1 . Assim, a circunferência diretriz de centro F_1 é o lugar geométrico dos pontos simétricos de F_2 em relação às retas tangentes à elipse. A diretriz da parábola tem centro F_1 impróprio e está caracterizada como a reta diretriz γ , tendo a mesma propriedade referida acima.
3. Para a hipérbole, as retas tangentes que passam pelo seu centro O, são denominadas assíntotas da hipérbole.

DEFINIÇÃO

As retas perpendiculares à reta tangente à cônica em um ponto P são denominadas normais à cônica.

2.3. PROPRIEDADES DA PARÁBOLA

Nomenclatura:

- PT - comprimento da tangente
- PN - comprimento da normal
- TI - sub-tangente
- IN - sub-normal
- $MF_2 = 2A_2F_2 = 2p$ - parâmetro
- $A_2I = x$, $PI = y$

1. O quadrilátero TF'_2PF_2 é losango (figura 2.7), pois F'_2P e TF_2 são iguais e paralelos (pois $\Delta F'_2LP = \Delta F_2LT$ pelo critério LAA₀); logo TF'_2PF_2 tem todas as propriedades de um losango.
2. O quadrilátero F'_2PNF_2 é paralelogramo, pois $F'_2P \parallel F_2N$ e $PN \parallel F'_2F_2$; logo F'_2PNF_2 tem todas as propriedades de um paralelogramo.
3. A sub-normal IN é constante por ser sempre igual ao parâmetro $MF_2 = 2A_2F_2 = 2p$.
De fato, $\Delta PIN = \Delta F'_2MF_2$, pois ambos são triângulos retângulos e têm um cateto e um ângulo agudo respectivamente iguais.
4. A sub-tangente é variável, mas conserva-se sempre igual ao dobro da abscissa x do ponto de tangência.
De fato, no ΔTPI , como L é ponto médio de TP e o eixo y é paralelo a PI, pelo Teorema de Tales conclui-se que A_2 é ponto médio de TI, ou seja, $TI = 2A_2I = 2x$.

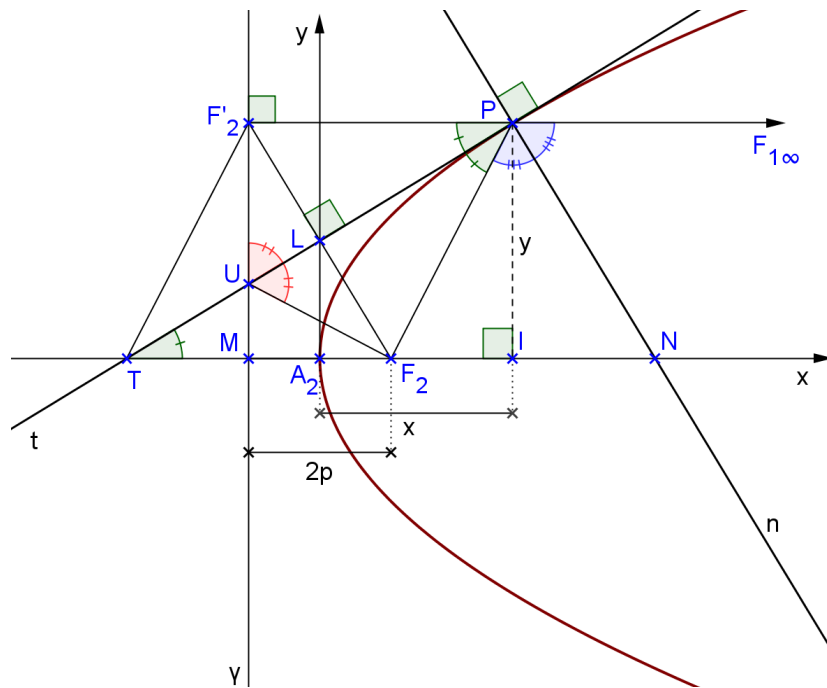


Figura 2.7 - Propriedades da parábola

5. A ordenada y do ponto de contato P é média proporcional entre as respectivas sub-tangente e sub-normal.

De fato, no $\triangle TPN$, retângulo em P , PI é a altura e $PI^2 = TI \cdot IN$; logo, $y^2 = 2x \cdot 2p = 4px$ que é a equação da parábola.

2.4. PROPRIEDADES DAS CIRCUNFERÊNCIAS PRINCIPAIS DA ELIPSE E DA HIPÉRBOLE

DEFINIÇÃO

A circunferência ζ que tem centro O e raio a é denominada circunferência principal da elipse ou da hipérbole.

PROPRIEDADE

A circunferência principal da elipse (ou da hipérbole) é o lugar geométrico das projeções dos focos sobre as tangentes traçadas à elipse (ou à hipérbole).

Demonstração:

A demonstração para o caso da hipérbole pode ser feita de modo análogo à da elipse e será omitida. No teorema anterior, mostrado na seção 2.2, foi visto que $F_1F'_2 = 2a$.

Além disso, $F_2L = F'_2L$ e $F_1O = OF_2 = c$ (figura 2.8), donde se tem que os triângulos $\triangle F_1F_2F'_2$ e $\triangle OF_2L$ são semelhantes. Logo, tem-se:

$$\frac{F_1F'_2}{OL} = \frac{F_1F_2}{OF_2} = \frac{2c}{c},$$

portanto,

$$\frac{F_1F'_2}{OL} = 2,$$

ou seja,

$$2OL = 2a$$

$$\therefore OL = a.$$

donde o ponto L pertence à circunferência principal.

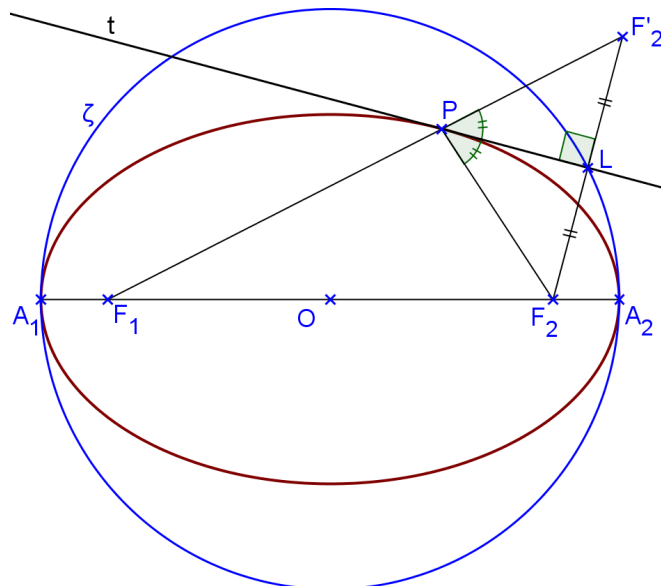


Figura 2.8 - Circunferência Principal da elipse

TEOREMA

Os pontos da circunferência principal e da elipse se correspondem segundo uma afinidade

homológica cuja razão é $\frac{b}{a} = \sqrt{1 - \left(\frac{c}{a}\right)^2}$.

Demonstração:

Nos triângulos $\triangle OCE$ e $\triangle ODF$ da Figura 2.9 tem-se que:

$$\text{sen}\theta = \frac{y}{a} = \frac{y'}{b}$$

$$\therefore y = a \cdot \text{sen}\theta, \text{ e } y' = b \cdot \text{sen}\theta.$$

Como $\triangle OCE \sim \triangle ODF$, pode-se concluir que:

$$\frac{y}{y'} = \frac{a}{b}$$

ou seja,

$$y = y' \frac{a}{b}. \quad (23)$$

Como C pertence à circunferência principal da elipse, tem-se:

$$x^2 + y^2 = a^2. \quad (24)$$

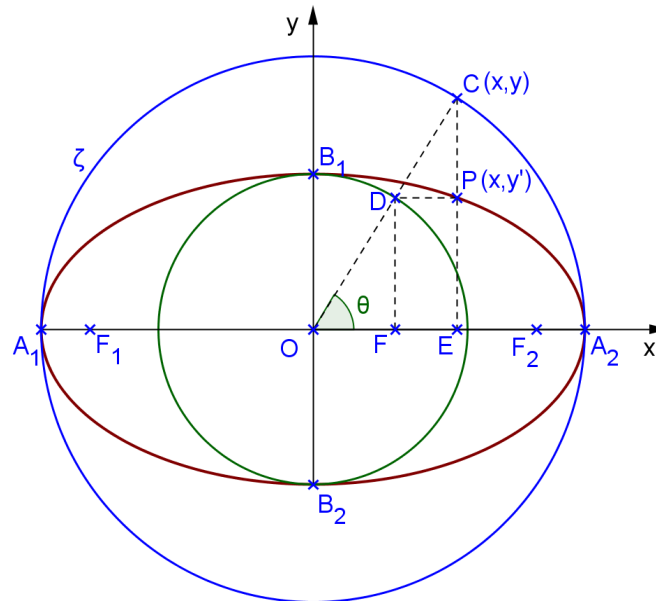


Figura 2.9 - Afinidade homológica na elipse

Substituindo (23) em (24), obtém-se:

$$x^2 + \left(y' \frac{a}{b}\right)^2 = a^2$$

$$\therefore \frac{x^2}{a^2} + \frac{(y'a)^2}{a^2 b^2} = 1$$

$$\therefore \frac{x^2}{a^2} + \frac{(y')^2}{b^2} = 1.$$

Portanto, P pertence à elipse.

2.5. ASSÍNTOTAS DA HIPÉRBOLE

PROBLEMA

Traçar as retas tangentes à hipérbole, dada pelos focos e $2a$, que contém o centro da hipérbole (figura 2.10).

Solução:

Todos os pontos que pertencem a uma das retas tangentes à hipérbole satisfazem a seguinte condição:

$$PF_2 = PF'_2,$$

pois a tangente é a mediatriz do segmento $F_2F'_2$ (considerando a circunferência diretriz γ_1). Logo,

$$OF_2 = OF'_2.$$

Assim, basta traçar a circunferência de centro O e raio OF_2 e sobre γ_1 tem-se F'_2 e F''_2 . As retas tangentes encontradas são as assíntotas da hipérbole s_1 e s_2 , ou seja, são as retas tangentes à hipérbole que passam pelo centro da cônica.

Para encontrar os pontos de tangência das assíntotas, unimos F_1 e F'_2 . Mas a reta $F_1F'_2$ é paralela a s_1 , pois F'_2 pertence ao arco capaz de 90° em F_1F_2 . Assim, o ângulo $F_1\hat{F}'_2F_2$ é reto, e a reta $F_1F'_2$ é paralela a s_1 . O mesmo ocorre com a reta s_2 .

Portanto, as retas assíntotas não interceptam a hipérbole, ou seja elas tangenciam a hipérbole em pontos impróprios.

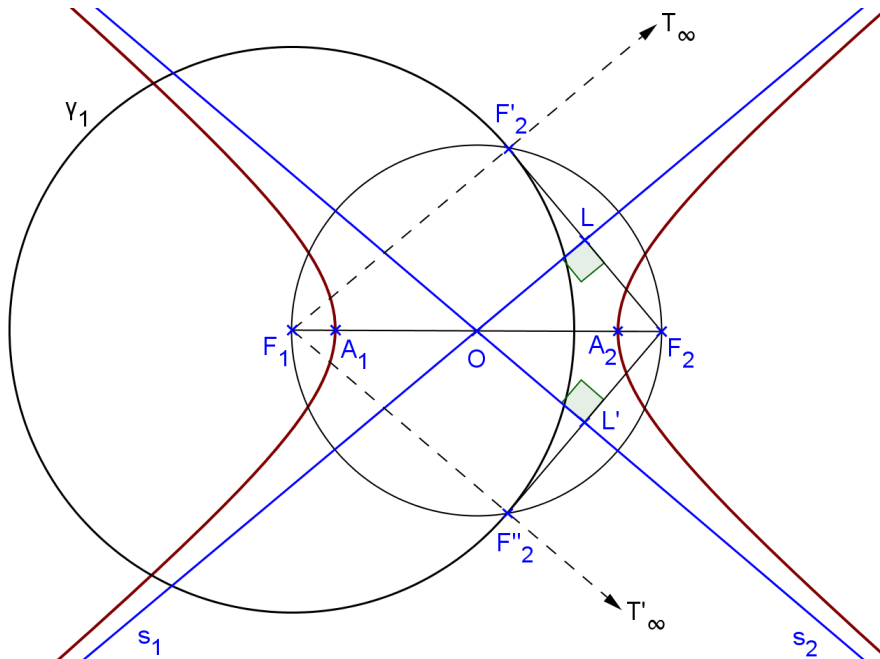


Figura 2.10 - Retas Assíntotas da Hipérbole

De acordo com as propriedades da circunferência principal de uma hipérbole, e como pode ser visto na construção da Figura 2.10, o ponto L, projeção de um foco sobre uma tangente, pertence à circunferência principal da hipérbole, sendo, portanto, $OL = a$.

Logo, tem-se a congruência dos triângulos $\triangle LOF_2$ e $\triangle A_2OD$ (por LAA₀), pois $OF_2 = OD = c$ e $OL = OA_2$ (figura 2.11). Assim, pode-se concluir que $A_2D = b$, pois tem-se um triângulo retângulo $\triangle OA_2D$, com o cateto OA_2 e a hipotenusa OD de medidas conhecidas e iguais aos semi-diâmetros a e c .

Já foi demonstrado que, nestas condições, o outro cateto mede b . Portanto, tem-se um retângulo $DEFG$, que têm lados de medidas $2a$ (DE e FG) e $2b$ (EF e DG). As diagonais deste retângulo são as retas assíntotas da hipérbole.

DEFINIÇÃO

Duas hipérboles são denominadas conjugadas quando o diâmetro real de uma tem medida igual ao diâmetro imaginário da outra.

Neste caso, as assíntotas das hipérboles conjugadas coincidem (figura 2.12). A equação da hipérbole de eixo real A_1A_2 e imaginário B_1B_2 é:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

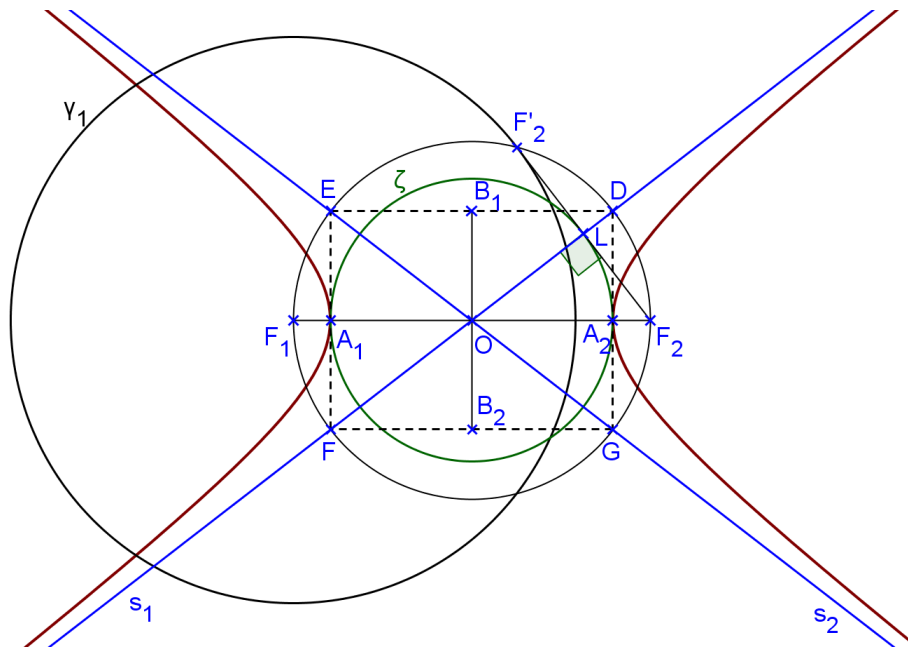


Figura 2.11 - Retas Assíntotas da Hipérbole

e a hipérbole conjugada possui diâmetro real igual a $-B_1B_2$ e imaginário $-A_1A_2$, ou seja, sua equação será:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1.$$

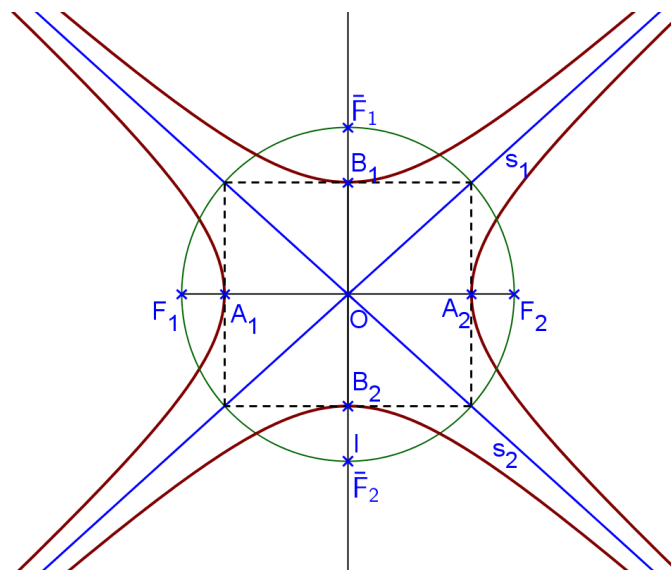


Figura 2.12 – Hipérbolas conjugadas

2.6. DIÂMETROS CONJUGADOS

TEOREMA

A reta que passa pelos pontos médios de cordas paralelas P_1P_2 de uma elipse contém o centro da elipse.

Demonstração:

Considere a elipse de equação

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

e a família de retas paralelas com equações da forma:

$$y = mx + k \quad (25)$$

que possuem o coeficiente angular m comum. Substituindo-se a expressão (25) de y na equação da elipse obtém-se a equação quadrática:

$$(a^2m^2 + b^2)x^2 + 2a^2mkx + a^2(k^2 - b^2) = 0, \quad (26)$$

que determina as abscissas dos pontos de interseção P_1 e P_2 de uma família de cordas paralelas com a elipse. O ponto médio de uma corda P_1P_2 é a média aritmética das abscissas de P_1 e P_2 , que é a raiz de (26), ou seja,

$$x_0 = -\frac{a^2mk}{a^2m^2 + b^2}, \quad (27)$$

e a ordenada satisfaz a equação (25):

$$y_0 = mx_0 + k. \quad (28)$$

Substituindo (27) em (28) obtém-se:

$$y_0 = -\frac{b^2x_0}{a^2m}, \quad (29)$$

que é a equação de uma reta que passa pela origem, ou seja, pelo centro da elipse.

DEFINIÇÃO

Diâmetro é qualquer corda que contém o centro da elipse. Dois diâmetros E_1E_2 e D_1D_2 são conjugados quando cada um divide ao meio as cordas paralelas ao outro (figura 2.13).

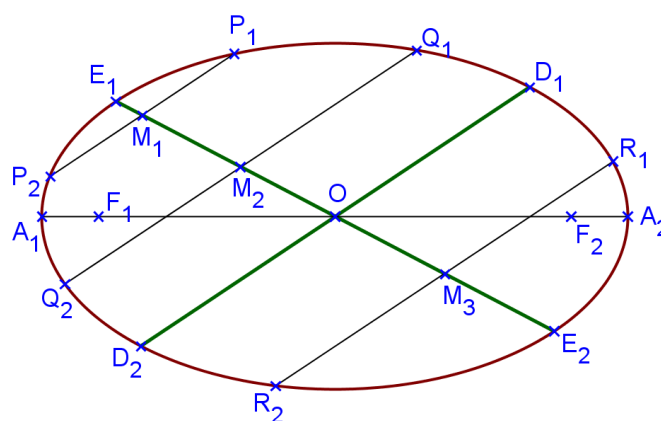


Figura 2.13 - Diâmetros conjugados de uma elipse

As tangentes à cônica traçadas pelas extremidades D_1 e D_2 do diâmetro D_1D_2 são paralelas ao diâmetro E_1E_2 (figura 2.14), e as tangentes à cônica que passam por E_1 e E_2 são paralelas a D_1D_2 .

Quando a reta paralela P_1P_2 é tangente à elipse, então P_1 , P_2 e o ponto médio $M_1(x_0, y_0)$ coincidem, formando-se um paralelogramo circunscrito na elipse.

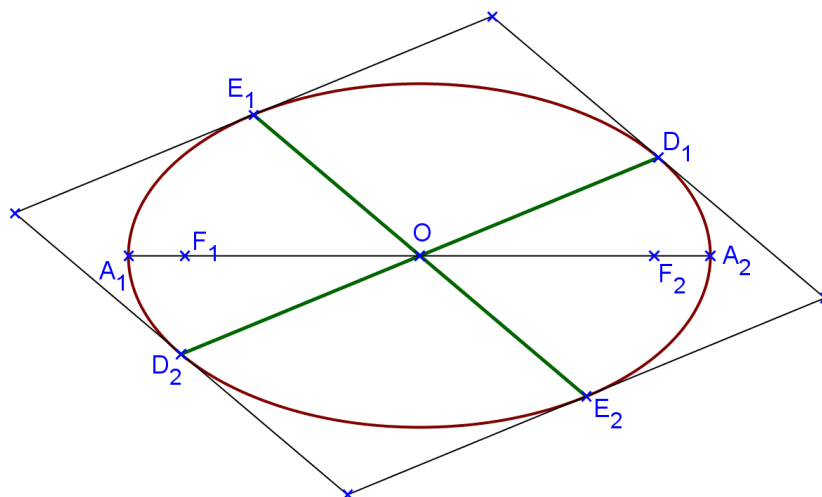


Figura 2.14 - Diâmetros conjugados de uma elipse

TEOREMA

Chamado de gancho de Arquimedes, considere o segmento de tamanho igual ao semi-diâmetro principal da elipse (a), que une um ponto P da elipse a um ponto J do eixo das ordenadas (y) e intercepta o eixo das abscissas (x) em um ponto K . Nestas condições, o segmento PK tem medida igual ao semi-diâmetro menor da elipse (b).

Demonstração:

Considere a elipse de equação

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

e o segmento PJ que intercepta o eixo x em K (figura 2.15), onde $PJ = a$. Encontrando-se a circunferência de centro $P(x_0, y_0)$ com raio a , obtêm-se os pontos J e M sobre o eixo y . O segmento considerado será PJ , pois o mesmo intercepta o eixo x em $K(x_1, 0)$.

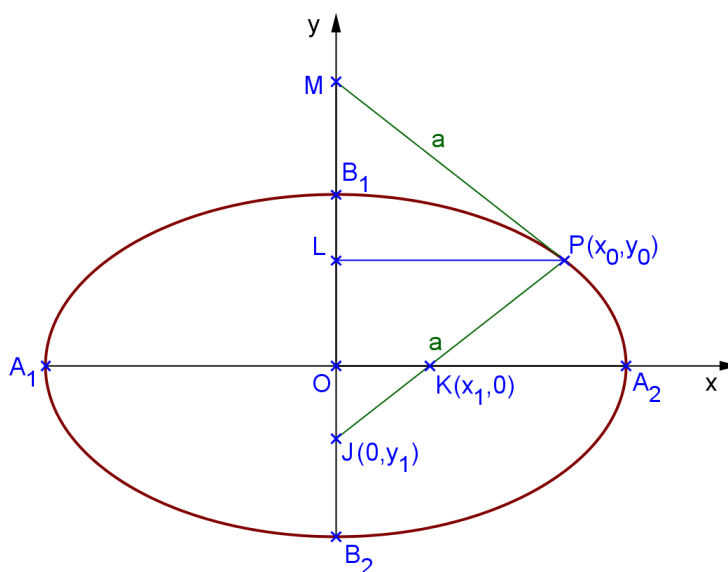


Figura 2.15 – gancho de Arquimedes

A equação da circunferência de centro P e raio $PJ = a$ é:

$$x^2 + (y - y_1)^2 = a^2,$$

$$\therefore x_0^2 = a^2 - (y_0 - y_1)^2. \quad (30)$$

Substituindo (30) na equação da elipse, obtém-se que:

$$y_1 = y_0 - \frac{a}{b}y_0, \text{ ou seja, } y_0 - y_1 = \frac{a}{b}y_0. \quad (31)$$

Como $\triangle JKO \sim \triangle JPL$, obtém-se a relação:

$$\frac{x_0}{x_1} = \frac{y_0 - y_1}{y_1} = \frac{a}{JK}$$

Substituindo $y_0 - y_1$ de (31) obtém-se:

$$\frac{\frac{a}{b}y_0}{y_1} = \frac{a}{JK}$$

$$\therefore JK = \frac{y_0 - \frac{a}{b}y_0}{y_0} b$$

$$\therefore JK = b - a.$$

Logo, $PK = b$.

TEOREMA

Considere os diâmetros conjugados D_1D_2 e E_1E_2 , o segmento $D_1J = a$ (teorema anterior) e o retângulo $OJLK$ (figura 2.16). Nestas condições, o segmento D_1L é ortogonal ao diâmetro conjugado E_1E_2 .

Demonstração:

Considere o segmento $D_1K = b$ (teorema anterior), o ponto H pertencente ao eixo x tal que $HD_1 \perp OH$ e o ponto G nos prolongamentos de HD_1 e JL .

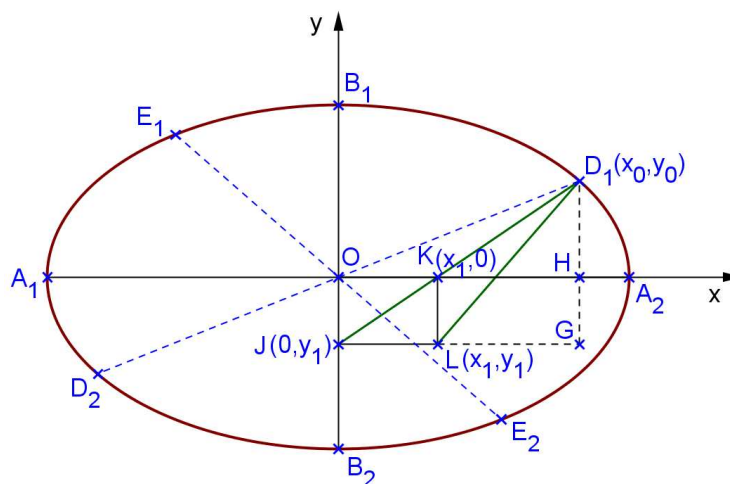


Figura 2.16 - diâmetros conjugados

De acordo com as equações (25) e (29), o diâmetro D_1D_2 pertence à reta de equação:

$$y = mx$$

e o diâmetro E_1E_2 pertence à reta com coeficiente angular:

$$m = -\frac{b^2x_0}{a^2y_0}. \quad (32)$$

Da semelhança entre os triângulos ΔD_1HK e ΔD_1GJ , obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{D_1K}{D_1J} &= \frac{HK}{JG} \text{ e } \frac{D_1K}{D_1J} = \frac{D_1H}{D_1G} \\ \therefore \frac{b}{a} &= \frac{x_0 - x_1}{x_0} \text{ e } \frac{b}{a} = \frac{y_0}{y_0 - y_1} \\ \therefore x_0 - x_1 &= \frac{b}{a}x_0 \text{ e } y_0 - y_1 = \frac{a}{b}y_0. \end{aligned} \quad (33)$$

Logo, o coeficiente angular da reta que passa pelos pontos $D_1(x_0, y_0)$ e $L(x_1, y_1)$ é:

$$m' = \frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1} = \frac{ay_0}{b} \Big/ \frac{bx_0}{a} = \frac{a^2y_0}{b^2x_0}.$$

Como o coeficiente angular m' é o oposto do inverso do coeficiente angular de E_1E_2 , da equação (32), então as retas que passam por E_1E_2 e D_1L são perpendiculares.

TEOREMA

Considere os diâmetros conjugados D_1D_2 e E_1E_2 , o segmento $D_1J = a$ e o retângulo $OJLK$ (figura 2.16). Nestas condições a medida do segmento D_1L é igual à metade do diâmetro E_1E_2 .

Demonstração:

As hipóteses deste teorema são as mesmas do teorema anterior. A distância entre os pontos D_1 e L pode ser obtida através do teorema de Pitágoras:

$$D_1L^2 = D_1G^2 + LG^2.$$

Como $D_1G = y_0 - y_1$ e $LG = x_0 - x_1$ tem-se:

$$D_1L^2 = (x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2.$$

De acordo com (33), os segmentos $y_0 - y_1$ e $x_0 - x_1$ podem ser substituídos por $\frac{a}{b}y_0$ e $\frac{b}{a}x_0$, respectivamente:

$$D_1L^2 = \left(\frac{b}{a}x_0\right)^2 + \left(\frac{a}{b}y_0\right)^2 = \frac{b^4x_0^2 + a^4y_0^2}{a^2b^2}$$

Como D_1 pertence à reta de equação $y = mx$, o valor de y_0 pode ser substituído na equação acima por mx_0 :

$$\therefore D_1L^2 = \frac{b^4x_0^2 + a^4m^2x_0^2}{a^2b^2} = \frac{x_0^2(b^4 + a^4m^2)}{a^2b^2}$$

$$\therefore D_1L = \frac{x_0}{ab} \sqrt{b^4 + a^4m^2}.$$

Como $D_1(x_0, y_0)$ pertence à elipse, então:

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1 \quad \therefore \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{m^2 x_0^2}{b^2} = 1 \quad \therefore \frac{b^2 x_0^2 + a^2 m^2 x_0^2}{a^2 b^2} = 1 \quad \therefore a^2 b^2 = x_0^2 (b^2 + a^2 m^2)$$

$$\therefore ab = x_0 \sqrt{b^2 + a^2 m^2} \quad \therefore \frac{x_0}{ab} = \frac{1}{\sqrt{b^2 + a^2 m^2}}.$$

Logo,

$$\therefore D_1 L = \frac{\sqrt{b^4 + a^4 m^2}}{\sqrt{b^2 + a^2 m^2}}. \quad (35)$$

O ponto $E_1(x_2, y_2)$ pertence à reta de equação (29):

$$\therefore y_2 = \frac{b^2 x_2}{a^2 m} \quad \therefore x_2 = \frac{y_2 a^2 m}{b^2}. \quad (36)$$

Além disso, o ponto $E_1(x_2, y_2)$ pertence à elipse. Logo, pode-se substituir na equação da elipse o valor de x_2 , obtendo-se:

$$\left(\frac{y_2 a^2 m}{b^2} \right)^2 \frac{1}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} = 1,$$

que desenvolvendo resulta em:

$$y_2 = \frac{b^2}{\sqrt{a^2 m^2 + b^2}}.$$

Substituindo o valor de y_2 na equação (36) obtém-se:

$$x_2 = \frac{a^2 m}{\sqrt{a^2 m^2 + b^2}}.$$

A distância de E_1 ao centro da elipse mede a metade de $E_1 E_2$:

$$\begin{aligned} E_1 O^2 &= x_2^2 + y_2^2 = \left(\frac{a^2 m}{\sqrt{a^2 m^2 + b^2}} \right)^2 + \left(\frac{b^2}{\sqrt{a^2 m^2 + b^2}} \right)^2 \\ \therefore E_1 O^2 &= \frac{a^4 m^2}{a^2 m^2 + b^2} + \frac{b^4}{a^2 m^2 + b^2} = \frac{a^4 m^2 + b^4}{a^2 m^2 + b^2} \\ \therefore E_1 O &= \sqrt{\frac{a^4 m^2 + b^4}{a^2 m^2 + b^2}}, \end{aligned}$$

que tem mesma medida de $D_1 L$, conforme equação (35). Logo, $D_1 L$ vale a metade do diâmetro conjugado $E_1 E_2$.

Utilizando-se os teoremas desta seção, o seguinte problema pode ser resolvido:

PROBLEMA

Determinar os elementos principais de uma elipse dada pelos diâmetros conjugados $D_1 D_2$ e $E_1 E_2$.

O segmento D_1L é ortogonal a E_1E_2 e mede $\frac{E_1E_2}{2}$ (figura 2.17). Unindo-se O e L obtém-se o lugar geométrico dos vértices J e K: o arco capaz de 90° em OL.

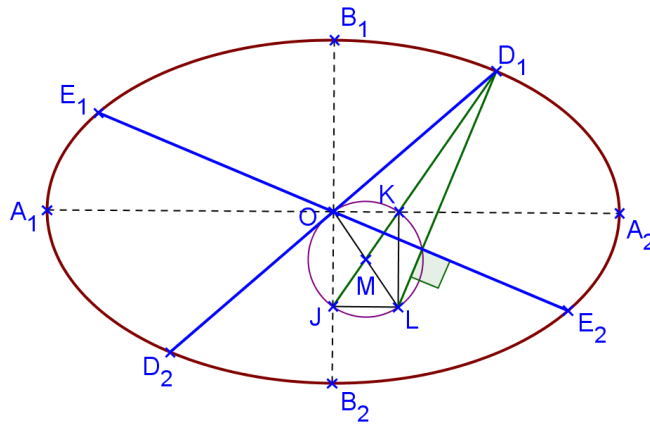


Figura 2.17 - problema de determinar elipse dada pelos diâmetros conjugados

A reta que passa por D_1 e M, ponto médio de OL, determina J e K no arco capaz de 90° . Unindo-se O e J obtém-se a reta suporte do diâmetro B_1B_2 e unindo-se O e K obtém-se a reta suporte do diâmetro principal da elipse.

As medidas de OA_1 e OB_1 são iguais, respectivamente, a D_1J e D_1K (gancho de Arquimedes).

Demonstra-se que para a elipse valem também as seguintes propriedades:

Propriedade 1

A reta perpendicular ao diâmetro principal de uma elipse, que passa pela extremidade de um diâmetro conjugado D_1 , intercepta a circunferência principal da elipse em um ponto D'_1 . As retas tangentes à elipse em D_1 e à circunferência principal em D'_1 interceptam-se em um ponto T_1 pertencente ao eixo principal da elipse A_1A_2 (figura 2.18).

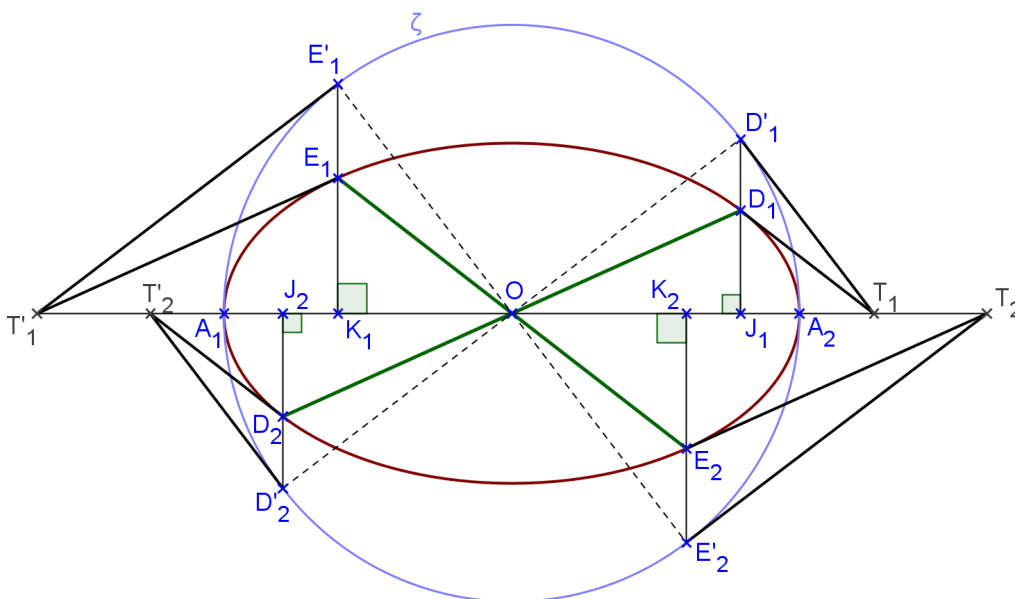


Figura 2.18 - Propriedade 1

Propriedade 2

Dados os diâmetros conjugados D_1D_2 e E_1E_2 , para encontrar pontos da elipse basta determinar a circunferência β de diâmetro igual a D_1D_2 e construir uma correspondência de afinidade (figura 2.19). O segmento $J_1J_2 \perp D_1D_2$, que passa pelo centro O , determina as direções da afinidade: E_1J_1 e E_2J_2 . O ponto M pertencente a D_1D_2 determina K_1 e K_2 em β , e os pontos da elipse P_1 e P_2 , tais que $K_1K_2 \parallel J_1J_2$, $P_1K_1 \parallel E_1J_1$ e $P_2K_2 \parallel E_2J_2$.

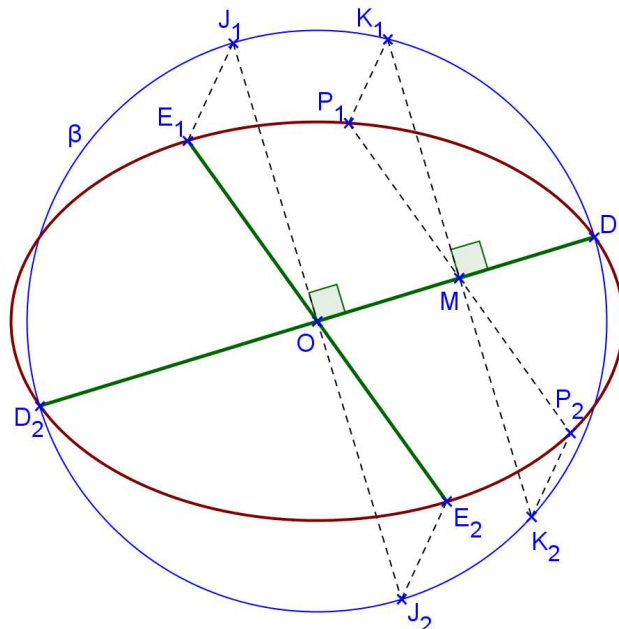


Figura 2.19 - Propriedade 2

TEOREMA

A reta que passa pelos pontos médios de cordas paralelas P_1P_2 de uma hipérbole contém o centro da hipérbole.

Demonstração:

Considerando-se a hipérbole de equação

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

e a família de retas paralelas com equações da forma:

$$y = mx + k \quad (37)$$

que possuem o coeficiente angular m comum. Utilizando de forma similar ao caso da elipse, mostrado nas equações (25) a (29), obtém-se que o ponto médio de uma corda P_1P_2 satisfaz as relações:

$$x_0 = \frac{a^2mk}{b^2 - a^2m^2} \text{ e } y_0 = \frac{b^2x_0}{a^2m}, \quad (38)$$

onde $y_0 = \frac{b^2x_0}{a^2m}$ é a equação de uma reta que passa pela origem, ou seja, pelo centro da hipérbole.

TEOREMA

Dado o diâmetro D_1D_2 de uma hipérbole, o diâmetro conjugado E_1E_2 pertence à hipérbole conjugada.

Demonstração:

Seja o ponto $P_1(x_0, y_0)$ pertencente à reta definida em (38), paralela ao diâmetro D_1D_2 . Substituindo os valores de x_0 e y_0 na equação de uma hipérbole obtém-se:

$$\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} = \frac{1}{a^2} \left(\frac{a^2 m k}{b^2 - a^2 m^2} \right)^2 - \frac{1}{b^2} \left(\frac{b^2 x_0}{a^2 m} \right)^2 = -k^2,$$

ou seja, o coeficiente linear da equação (37) sempre será negativo, mostrando que o diâmetro conjugado E_1E_2 não pertence à hipérbole que passa por D_1D_2 . Quando $k = -1$ o ponto P_1 será a extremidade do diâmetro conjugado E_1E_2 , pertencente à hipérbole conjugada (figura 2.20).

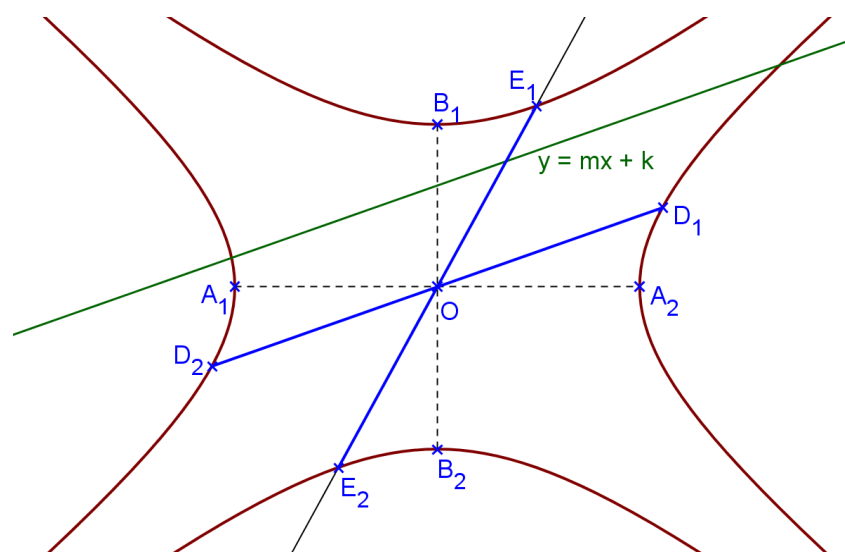


Figura 2.20 – diâmetros conjugados da hipérbole

Como as assíntotas passam pelo centro da hipérbole, são também diâmetros com equações:

$$y = \pm \frac{b}{a},$$

e seus diâmetros conjugados são as próprias assíntotas, tornando-se um caso limite de quando D_1 e D_2 são pontos impróprios.

Analogamente à elipse, as retas paralelas a um diâmetro conjugado que passam pelas extremidades do outro são tangentes às hipérboles.

Portanto, tem-se o paralelogramo RSTU (figura 2.21), onde as diagonais do mesmo são as assíntotas (s_1 e s_2) e os pontos médios dos lados opostos são as extremidades dos diâmetros conjugados.

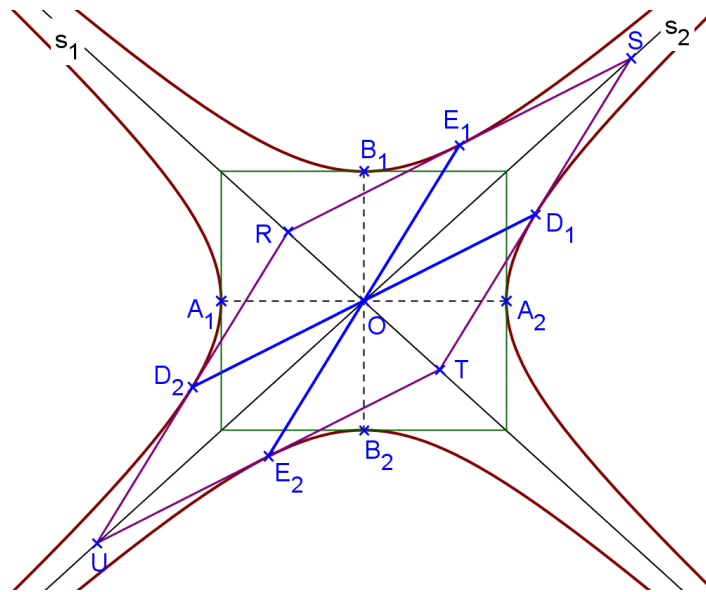


Figura 2.21 – diâmetros conjugados da hipérbole

2.7 - O TEOREMA DE PONCELET E SUAS CONSEQUÊNCIAS

TEOREMA DE PONCELET

- i) As tangentes a uma cônica conduzidas por um ponto externo M formam ângulos iguais com as retas determinadas por esse ponto M e pelos focos, isto é, $\angle a = \angle a'$.
- ii) A reta que contém o ponto externo M e um foco é bissetriz do ângulo cujo vértice é esse foco e cujos lados contém os pontos de tangência, isto é, $\angle b = \angle b'$ e ainda $\angle c = \angle c'$ (na parábola, como F_1 é impróprio, a faixa entre as paralelas $F'_2F_{1\infty}$ e $MF_{1\infty}$ é igual à faixa entre $MF_{1\infty}$ e $F''_2F_{1\infty}$).

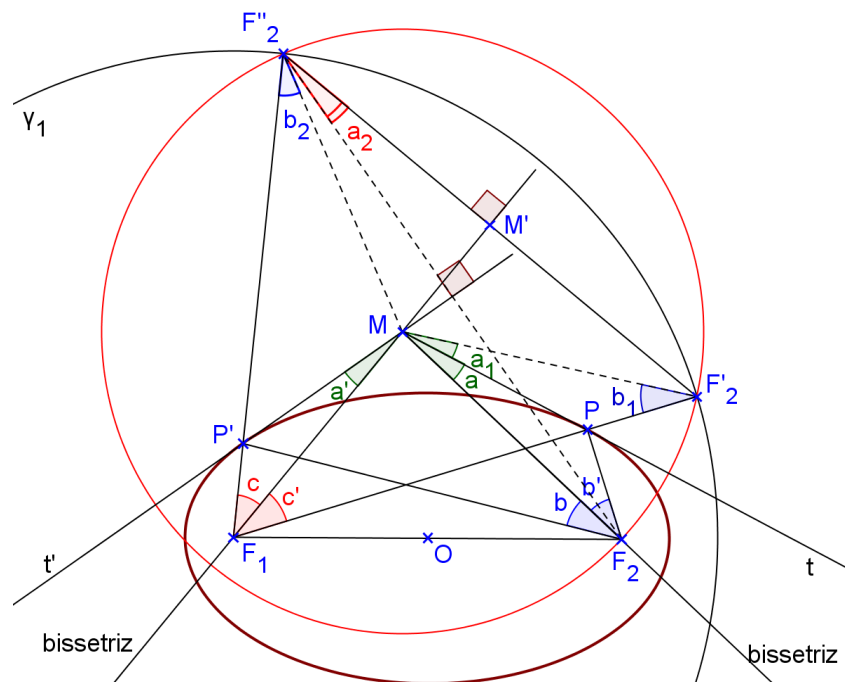


Figura 2.22 - Caso da Elipse

Demonstração da parte i:

Considerando que t é mediatriz de $F_2F'_2$, então $\angle a = \angle a_1$ (figuras 2.22, 2.23 e 2.24); assim,

$$\angle F_2MF'_2 = 2\angle a.$$

Considerando que t' é mediatriz de $F_2F''_2$ e MF_1 é mediatriz de $F'_2F''_2$ (pois $F'_2F''_2$ é a corda comum às circunferências de centros M e F_1), então:

$$\angle a' = \angle a_2. \quad (39)$$

pois têm lados respectivamente perpendiculares.

Considerando que $\angle a_2$ mede a metade do $\angle F_2MF'_2$ (pois um é ângulo inscrito e outro é ângulo central de uma mesma circunferência), obtém-se que

$$\angle a = \angle a_2,$$

Da igualdade (39) pode-se concluir que:

$$\angle a = \angle a'.$$

Demonstração da parte ii:

Considerando que t é mediatriz de $F_2F'_2$, então

$$\angle b' = \angle b_1. \quad (40)$$

Considerando que t' é mediatriz de $F_2F''_2$, então

$$\angle b = \angle b_2. \quad (41)$$

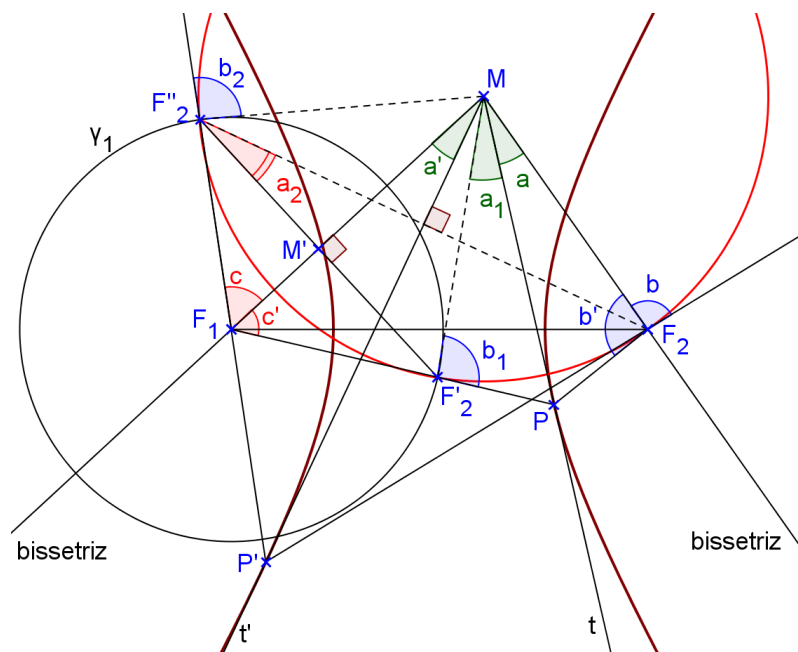


Figura 2.23 - Caso da Hipérbole

Considerando que os $\Delta MF_2F''_2$ e $\Delta F_1F'_2F''_2$ são isósceles, então

$$\angle b_1 = \angle b_2. \quad (42)$$

Das relações (40), (41) e (42), conclui-se que:

$$\angle b = \angle b'$$

Na elipse e na hipérbole, $MF_1 \perp F'_2F''_2$, então F_1M é bissetriz do ângulo central $\angle F'_2F_1F''_2$, ou seja,

$$\angle c = \angle c'$$

Na parábola, a reta $MF_{1\infty}$, perpendicular à diretriz conduzida pelo ponto M divide ao meio o segmento PP' cujas extremidades são os pontos de tangência das retas tangentes traçadas por M , isto porque, no trapézio $F'_2PP'F''_2$, como M' é ponto médio de $F'_2F''_2$ (pois o $\Delta MF'_2F''_2$ é isósceles e $MM' \perp F'_2F''_2$) e $M'M''$ é paralela às bases do trapézio, pelo teorema de Tales, conclui-se que M'' é ponto médio de PP' .

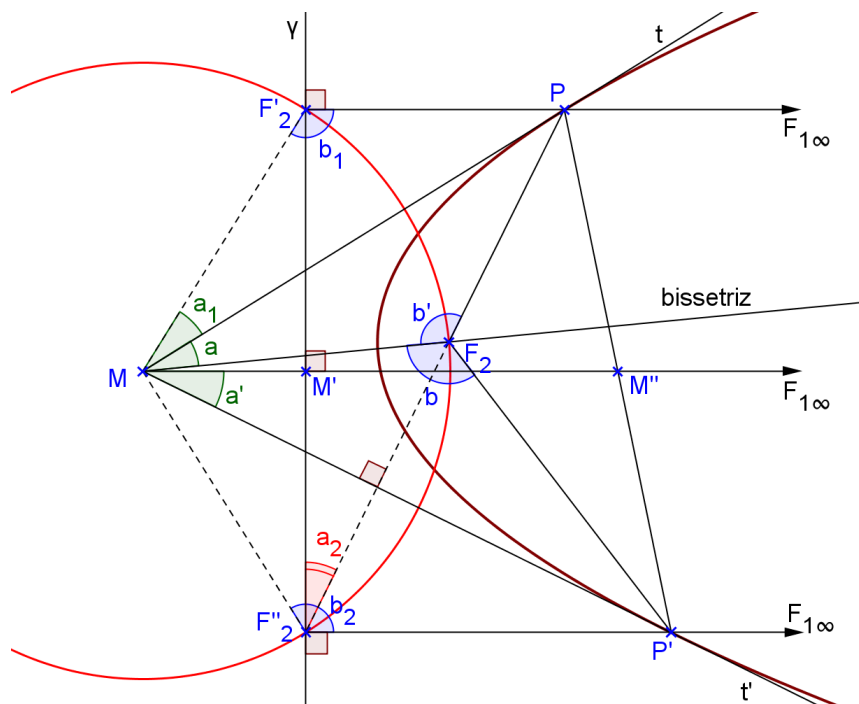


Figura 2.24 - Caso da Parábola

COROLÁRIO 1

Válido para a elipse e a hipérbole: O lugar geométrico dos pontos de encontro de duas tangentes perpendiculares entre si é uma circunferência.

Demonstração:

Os ângulos $\angle tMt'$ e $\angle F_1MF'_2$ são iguais. Se $\angle tMt' = 90^\circ$, então o $\Delta F_1MF'_2$ será retângulo em M , logo:

$$(MF_1)^2 + (MF'_2)^2 = (F_1F'_2)^2,$$

mas $MF'_2 = MF_2$ e $F_1F'_2 = 2a$, logo:

$$(MF_1)^2 + (MF_2)^2 = 4a^2 = \text{constante.}$$

Porém, o lugar geométrico dos pontos M cuja soma dos quadrados das distâncias a dois pontos dados F_1 e F_2 é uma constante, é uma circunferência de centro O e raio m , onde:

$$(MF_1)^2 + (MF_2)^2 = 2m^2 + \frac{(F_1F_2)^2}{2},$$

sendo $m = \sqrt{a^2 + b^2}$ para a elipse e $m = \sqrt{a^2 - b^2}$ para a hipérbole.

Essa circunferência é denominada **CIRCUNFERÊNCIA DE MONGE** ou **CIRCUNFERÊNCIA DIRETORA**.

COROLÁRIO 2

Válido para a parábola: O lugar geométrico dos pontos de encontro de duas tangentes perpendiculares entre si é a diretriz.

Demonstração:

Como $\angle a = \angle a_1$ e $\angle F_2MP' = \angle P'MF''_2$, então se $\angle tMt'$ for reto, o $\angle F'_2MF''_2$ será igual a um ângulo raso e M pertencerá a γ .

COROLÁRIO 3

De um foco, vê-se, sob ângulo constante, um segmento $M'M''$ de tangente móvel compreendido entre duas tangentes fixas.

Demonstração:

A demonstração será feita somente para a elipse, pois no caso da hipérbole e da parábola as demonstrações são análogas.

Considerando que F_2M'' é bissetriz do $\angle PF_2P''$ e que F_2M' é bissetriz do $\angle P''F_2P'$, verifica-se que $\angle M'F_2M'' = \angle a + \angle b$ é constante, uma vez que $\angle PF_2P' = 2\angle a + 2\angle b$ também é constante (figura 2.25).

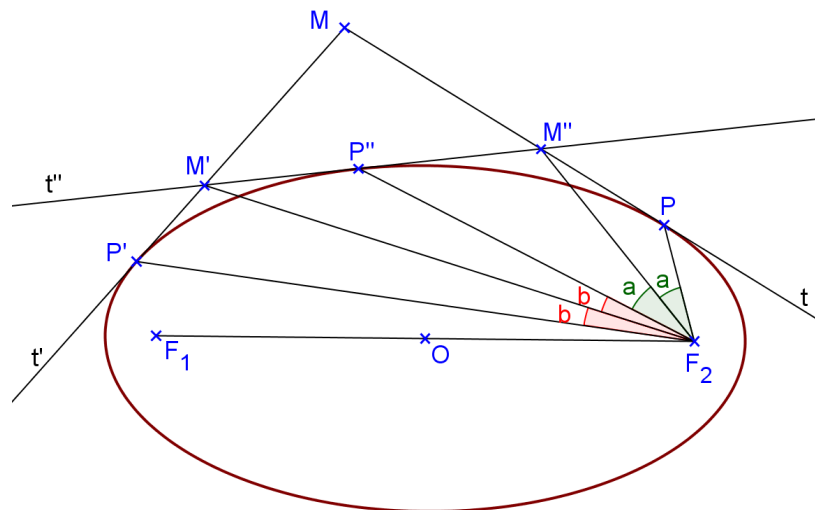


Figura 2.25 - Corolário 3 para elipse

COROLÁRIO 4

Válido para a parábola: O segmento MF_2 é média proporcional entre os raios vetores F_2P e F_2P' .

Demonstração:

Os triângulos $\triangle MPF_2$ e $\triangle MP'F_2$ são semelhantes (pois $\angle b = \angle b'$ e $\angle a = \angle a'$), logo:

$$\frac{MF_2}{F_2P} = \frac{F_2P'}{MF_2} \quad \therefore MF_2^2 = F_2P \cdot F_2P'.$$

COROLÁRIO 5

Válido para a parábola: A diretriz é o lugar geométrico dos pontos de encontro das tangentes conduzidas pelas extremidades das cordas focais.

Demonstração:

Se PP' contém F_2 , então:

$$\angle b + \angle b' = 180^\circ.$$

Logo,

$$\angle b_1 + \angle b_2 = 180^\circ,$$

e M pertencerá a γ .

2.8. PROBLEMAS

Construir uma elipse ou uma hipérbole, dados os cinco elementos:

1. O , F_1 e uma reta tangente à cônica, t .

Solução: Se O e F_1 estiverem contidos em um mesmo semi-plano determinado pela reta t , então a cônica é elipse, caso contrário, é hipérbole.

2. F_2 e três retas tangentes t , t' e t'' .
3. F_2 , duas retas tangentes t e t' e o comprimento $2a$.
4. F_2 , duas tangentes t e t' e um ponto P pertencente à cônica.

Solução: Encontrar F_1 centro da circunferência tangente à circunferência $\alpha(P, PF_2)$ e que passe pelos pontos F'_2 e F''_2 .

5. F_2 , uma tangente t , um ponto P pertencente à cônica e $2a$.

Solução: Encontrar a interseção F_1 das circunferências de centros F'_2 e P , e raios $2a$ e $2a - PF_2$.

6. F_1 , uma tangente t , um ponto P pertencente à cônica e $2a$.

Solução: Encontrar a interseção F_2 das circunferências de centros F'_1 e P , e raios $2a$ e $2a - PF_1$.

7. A_2 , F_2 e um ponto P pertencente à cônica.

Solução: Encontrar o centro F_1 da circunferência tangente à reta t' em F'_2 e tangente à circunferência $\alpha(P, PF_2)$. Neste caso, F'_2 é o simétrico de A_2 em relação a F_2 .

8. A_1 , F_1 e P .

9. F_1 , duas tangentes t e t' e o ponto T , sendo que $T \in t$.

10. F_1 , uma tangente t , a normal n e o ponto N , sendo que $N \in n$.

11. F_2 e os pontos P , P' e P'' pertencentes à cônica.

Solução: A circunferência diretriz γ_1 de centro F_1 deve tangenciar as circunferências $\alpha(P, PF_2)$, $\beta(P', P'F_2)$ e $\sigma(P'', P''F_2)$.

12. F_2 , os pontos P , P' e a reta tangente t , sendo $P \in t$.

Solução: A circunferência diretriz γ_1 de centro F_1 deve tangenciar as circunferências $\alpha(P, PF_2)$, $\beta(P', P'F_2)$ em F'_2 . Logo, deve ser tangente à reta $r \perp PF'_2$, recaindo no problema de traçar circunferências tangentes a uma circunferência dada e a uma reta dada no ponto P .

13. F_2 , os pontos P , P' e a reta tangente t .

Solução: A circunferência diretriz γ_1 de centro F_1 , contém o ponto F'_2 e é tangente às circunferências $\alpha(P, PF_2)$, $\beta(P', P'F_2)$.

14. A_2 , F_2 e uma reta tangente t .

15. A_1 , F_2 e uma reta tangente t .

16. O , duas tangentes t e t' e o comprimento $2a$.

Solução: A circunferência principal intercepta as tangentes em pontos que são as projeções ortogonais dos focos sobre as tangentes.

Resolver os três problemas clássicos sobre as cônicas (elipse ou hipérbole), onde as mesmas são dadas pelos focos e $2a$ (Problemas 17, 18 e 19):

17. Traçar por um ponto P retas tangentes à cônica onde:

17.1. P pertence à curva.

17.2. P não pertence à curva.

17.3. P coincide com O (somente para a hipérbole).

18. Traçar tangentes à cônica paralelas a uma reta dada.

19. Encontrar os pontos de interseção de uma reta com uma cônica.

20. Inscrever um quadrado em uma elipse, dada pelos focos e $2a$.

21. Construir um triângulo equilátero com um vértice coincidindo com o vértice da hipérbole e os outros dois sobre a hipérbole dada pelos focos e $2a$.

22. Inscrever um retângulo de lados proporcionais aos números m e n numa elipse dada pelos focos e $2a$.

23. Dados os focos de uma elipse, em posição, e uma reta r , construir o triângulo equilátero circunscrito na elipse e que tenha um dos lados sobre a reta r .

24. Traçar a circunferência de raio r , tangente à cônica em um ponto P , sendo a mesma dada pelos focos e por um ponto P .

25. Uma cônica (elipse ou hipérbole) é dada por F_1 , t , t' e t'' . Construir as tangentes à cônica que são perpendiculares a t .

26. Encontrar os focos de uma elipse dada por dois diâmetros conjugados.

27. Dada uma elipse pelos focos e $2a$ e uma reta r , obter os diâmetros conjugados, sabendo-se que um deles é paralelo à reta r .

Dados os pontos A e B, uma reta r e um comprimento m, obter em r pontos P tais que:

28. $PA + PB = m$.

29. $PA - PB = m$.

30. Traçar as assíntotas da hipérbole dada pelos seus vértices e seus focos.

31. Construir um quadrado cujos vértices pertencem a uma hipérbole dada pelos focos e $2a$.

32. Construir um retângulo de lados proporcionais aos segmentos m e n e cujos vértices pertencem a uma hipérbole dada pelos focos e $2a$.

33. Construir uma hipérbole equilátera, sendo dado a.

Solução: Numa hipérbole equilátera, os diâmetros real e imaginário são iguais, ou seja, $a = b$.

Construir uma hipérbole dada:

34. pelas assíntotas e $2b$.

35. pelas assíntotas e $2a$.

36. pelas assíntotas e $2c$.

37. por uma assíntota, O e F_1 .

38. por uma assíntota, F_1 , e sabendo-se que a mesma é equilátera.

39. Construir a hipérbole conjugada da hipérbole dada pelos seus focos e $2a$.

Solução: Duas hipérbolas são conjugadas quando possuem as mesmas assíntotas. Neste caso, o eixo real de uma é o eixo imaginário da outra.

40. Encontrar as assíntotas de uma hipérbole dada por dois diâmetros conjugados.

41. Obter os diâmetros principais de uma hipérbole dada por dois diâmetros conjugados.

Solução: As diagonais do paralelogramo RSTU (figura 2.21) são as assíntotas da hipérbole. Os eixos são as bissetrizes dos ângulos formados pelas assíntotas.

42. Dados dois diâmetros conjugados E_1E_2 e D_1D_2 , obter os eixos principais da hipérbole, sabendo-se que o real ou transversal é D_1D_2 .

43. Dados um par de diâmetros conjugados E_1E_2 e D_1D_2 e outro diâmetro V_1V_2 , obter o diâmetro U_1U_2 conjugado de V_1V_2 .

Solução: Primeiramente, acham-se as assíntotas. Depois, traça-se $V_1U_1 // s_2$ e tal que $U_1K = V_1K$, onde K pertence à outra assíntota, ou seja s_1 .

Obter os diâmetros principais de uma hipérbole dados:

44. as assíntotas s_1 e s_2 e um ponto H da curva.

Solução: Traçando-se uma reta x qualquer por H e marcando-se $S_1H' = HS_2$ (figura 2.26), obtém-se H' pertencente à hipérbole.

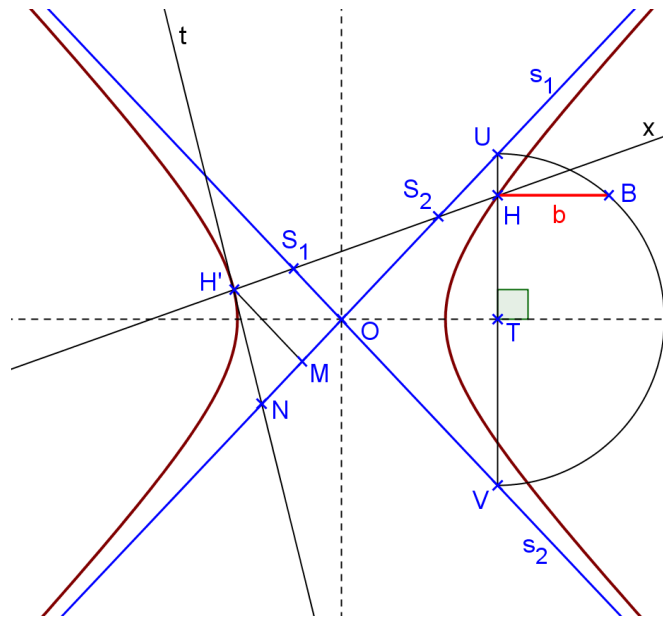


Figura 2.26 - Problema 44

Traçando-se $H'M \parallel s_2$ e marcando-se $MN = OM$, obtém-se a tangente no ponto H' . O comprimento HB , média geométrica entre HU e HV , é igual a b , pois tomando-se

$$\frac{TV}{OT} = \frac{b}{a} \Rightarrow TV = OT \frac{b}{a}.$$

Mas $HV = TV + HT = OT \frac{b}{a} + HT$ e $HU = TV - HT = OT \frac{b}{a} - HT$. Logo,

$$HU \cdot HV = \left(OT \frac{b}{a} + HT \right) \cdot \left(OT \frac{b}{a} - HT \right) = OT^2 \frac{b^2}{a^2} - HT^2$$

$$\therefore \frac{HU \cdot HV}{b^2} = \frac{OT^2}{a^2} - \frac{HT^2}{b^2} = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\therefore HU \cdot HV = b^2$$

45. Um par de diâmetros conjugados.

Solução: Encontram-se as assíntotas e recai-se no problema anterior.

46. Demonstrar que a trajetória de um ponto E fixo num segmento MN cujas extremidades percorrem duas retas r e s perpendiculares entre si é uma elipse, inclusive quando E está fixo no prolongamento de MN .

Solução: De fato: se E é fixo em MN, então EM e EN têm comprimentos constantes (figura 2.27). Traçando-se $EI \perp r(A_1, A_2)$ e $OP \parallel MN$ obtém-se P. A figura OPEM é um paralelogramo, logo, $OP = EM = \text{constante}$, e, portanto, P descreve uma circunferência de centro O e raio EM. Seja P' outro ponto onde EI encontra essa circunferência.

$$\triangle IEN \sim \triangle IPO \Rightarrow \frac{EI}{IP} = \frac{EN}{OP} = \frac{EN}{EM}.$$

Mas $IP = P'I$. Logo:

$$\frac{EI}{P'I} = \frac{EN}{EM} = \text{constante},$$

isto é, como P' percorre a circunferência, segue que E percorre uma elipse. Quando $M \equiv O$, o ponto $E \equiv A_1$ ou A_2 e quando $N \equiv O$, o ponto $E \equiv B_1$ ou B_2 , isto é, $EM = a$ e $EN = b$.

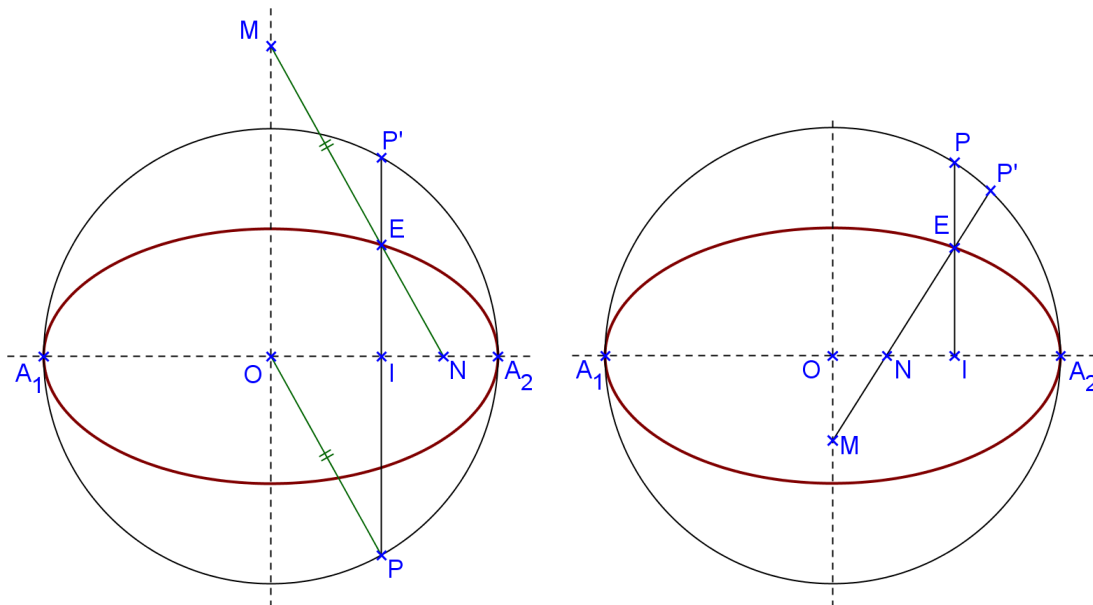


Figura 2.27 - Problema 46

47. Dados os vértices A_1 e A_2 e um ponto P da hipérbole, obter o semi-diâmetro b.

Solução 1: Da equação da hipérbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ obtém-se:

$$b = \frac{ay}{\sqrt{x^2 - a^2}}, \text{ ou seja,}$$

$$\frac{b}{a} = \frac{y}{d}, \text{ onde } d = \sqrt{x^2 - a^2}.$$

Solução 2: Obtenção de outros pontos H' e H'' (figura 2.28). Para isto, o retângulo A_2JPI é construído e são traçados os segmentos $J'I' \parallel JI$ e $J''I'' \parallel JI$. Assim,

$$H' \equiv A_1I' \cap A_2J' \text{ e } H'' \equiv A_1I'' \cap A_2J''.$$

Caso $A_1I'' \parallel A_2J''$, traçando-se por O uma paralela a ambas as retas, obtém-se uma assíntota da hipérbole.

48. Dados os pólos B_1 e B_2 e um ponto H da hipérbole, obter o semi-diâmetro a.

Solução: Da equação da hipérbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ obtém-se:

$$a = \frac{bx}{\sqrt{b^2 + y^2}}, \text{ ou seja,}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{x}{d}, \text{ onde } d = \sqrt{b^2 + y^2}.$$

49. Dada a hipérbole de focos F_1 e F_2 , e vértices A_1 e A_2 , construir os diâmetros conjugados da mesma, sabendo-se que o real (ou transverso) forma ângulo θ com o eixo real da mesma.

50. Construir a circunferência de Monge da elipse (ou hipérbole) dada pelos focos e $2a$.

Construir uma parábola, dados quatro elementos:

51. F_2 e as retas tangentes t e t' .

52. F_2 , o ponto P e a reta tangente t .

Solução: A diretriz γ é a reta tangente à circunferência $\alpha(P, PF_2)$ e que contém o ponto F'_2 , simétrico de F_2 em relação à reta t .

53. a reta diretriz γ e as retas tangentes t e t' .

Solução: A reta t contém o ponto de tangência P da parábola com t . Como P pertence à parábola, P é equidistante de γ e de F_2 . Logo, t é bissetriz do ângulo formado entre γ e UF_2 (Ver figura 2.7).

54. a reta diretriz γ , o ponto P e a reta tangente t .

55. F_2 , a reta tangente t e o ponto T pertencente à reta t .

Solução: A reta tangente à circunferência $\gamma(T, TF_2)$ é a diretriz γ .

56. F_2 , a reta normal n e o ponto P pertencente à reta n .

57. Dados um ponto A e duas retas r e s , obter os pontos de r que sejam equidistantes de A e da reta s .

Resolver os três problemas clássicos sobre parábola, sendo que a mesma é dada pelo foco e $2a$ (Problemas 58, 59 e 60):

58. Traçar por um ponto P, retas tangentes a uma parábola, tal que:

58.1. P pertence à parábola.

58.2. P não pertence à parábola.

59. Traçar tangentes a uma parábola paralelas a uma reta r dada.
60. Encontrar os pontos de interseção de uma reta r com uma parábola.

Construir uma parábola dados: (Ver Figura 2.7)

61. o eixo, uma reta tangente t e um ponto P pertencente à parábola e à reta t .
62. o eixo, uma reta normal n e um ponto P pertencente à parábola e à reta n .
63. os segmentos TI e PI .
64. os segmentos TI e IN .

65. Encontrar o ponto P da parábola dada pela sua reta diretriz γ e F_2 tal que $PF'_2 = PN$.
66. Construir uma parábola de diretriz γ , sabendo-se que P é um ponto da parábola e que o foco pertence a uma circunferência dada.
67. Construir uma parábola dadas as tangentes t e t' e os respectivos pontos de tangência P e P' .

3.1. INTRODUÇÃO

O conceito de pólo e polar não é utilizado com frequência, tampouco difundido, apesar de que suas vantagens são várias no que se refere ao estudo das cônicas. Usando-se reciprocidade polar, uma cônica transforma-se numa circunferência e vice-versa. Assim, um problema relativo às cônicas pode ser resolvido na sua circunferência recíproca e, usando-se o procedimento inverso, a sua solução retorna à cônica. Deste modo, precisa-se conceituar pólo, polar e reciprocidade polar.

3.2. PÓLO E POLAR

Tanto a razão harmônica de quatro pontos quanto o feixe harmônico de quatro retas têm a ver com o estudo de pólo e polar. Tomando-se um ponto qualquer como pólo em relação a duas retas, ou a um círculo ou a uma cônica, corresponde ao mesmo uma reta denominada polar do ponto em questão. Ou seja, considerando-se um ponto como pólo em relação a uma circunferência ou a duas retas, a polar deste ponto será o lugar geométrico dos pontos que estão numa certa razão harmônica com o pólo e com os pontos das retas ou da circunferência.

3.3. RAZÃO HARMÔNICA

Denomina-se razão dupla ou anarmônica de quatro pontos distintos e colineares, ao quociente que se obtém dividindo a razão das distâncias do primeiro ponto aos dois últimos pela razão das distâncias do segundo ponto aos dois últimos (figura 3.1).



$$\lambda = (ABCD) = \frac{AC}{AD} \div \frac{BC}{BD}$$

Figura 3.1 - Razão anarmônica entre quatro pontos

Quando se faz $(ABCD) = (ABDC)$, isto é, quando se impõe a condição que duas quaternas cujas razões anarmônicas inversas sejam iguais tem-se $\lambda^2 = 1$ ou $\lambda = \pm 1$.

Para $\lambda = +1$, dois pontos da quaterna serão coincidentes. Assim, $\lambda \neq 1$.

DEFINIÇÃO

As quaternas ordenadas cujas razões anarmônicas sejam iguais a -1 são denominadas quaternas harmônicas, e as razões duplas determinadas por essas quaternas são denominadas razões harmônicas.

Sendo $(ABCD) = -1$, então obtém-se:

$$\frac{AC}{BC} = -\frac{AD}{BD},$$

ou seja, existem dois pontos C e D, para os quais a razão das distâncias aos pontos A e B é em valor absoluto igual a um número real dado.

3.3.1. PROPRIEDADES DAS RAZÕES HARMÔNICAS

PROPRIEDADE 1

O conjugado harmônico do ponto médio de um segmento em relação aos extremos do mesmo é o ponto impróprio da reta suporte desse segmento.

Demonstração:

Seja A, B, C e D uma quaterna de pontos colineares (figura 3.2). O ponto D é impróprio, pois considerando que $\frac{CA}{CB} = -1$, tem-se $\frac{DA}{DB} = -1$. Traçando $BB' = BB''$ e $CA' = CB''$ obtém-se o paralelogramo $AA'B'B$, ou seja, o ponto $D \equiv AB \cap A'B'$ é impróprio.

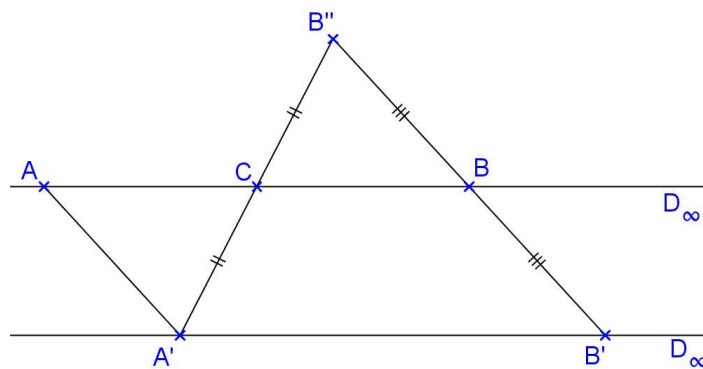


Figura 3.2 - Conjugado harmônico do ponto médio de um segmento

PROPRIEDADE 2

Seja A, B, C e D uma quaterna harmônica, tal que os pontos A e B estejam harmonicamente separados pelos pontos C e D. O segmento AB é média harmônica dos segmentos AC e AD.

Demonstração:

Substituindo os segmentos AC, AD, $AB - AC = -BC$ e $BD = AD - AB$, que correspondem às distâncias do ponto A tomando como origem cada um dos outros três, na razão harmônica

$$\frac{AC}{AD} = -\frac{BC}{BD}$$

obtém-se

$$\frac{AC}{AD} = \frac{AB - AC}{AD - AB},$$

de onde se conclui que

$$\frac{2}{AB} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{AD}$$

isto é, o inverso de AB é a média aritmética dos inversos de AC e AD. Logo, o segmento AB é média harmônica dos segmentos AC e AD.

PROPRIEDADE 3

A metade de um segmento de reta é média proporcional entre as distâncias do seu ponto médio aos dois pontos que dividem esse segmento harmonicamente.

Demonstração:

Sejam M o ponto médio do segmento AB, C e D os pontos que dividem harmonicamente AB (figura 3.3). Então, em valor absoluto, tem-se

$$\frac{CA}{CB} = \frac{DA}{DB}.$$

Desta proporção deduz-se as proporções

$$\frac{CA - CB}{CB} = \frac{DA - DB}{DB} \text{ e } \frac{CA + CB}{CB} = \frac{DA + DB}{DB}$$

as quais divididas membro a membro fornecem

$$\frac{CA - CB}{CA + CB} = \frac{DA - DB}{DA + DB}.$$

Mas $CA - CB = 2MC$, $CA + CB = 2AM$, $DA - DB = 2AM$ e $DA + DB = 2MD$. Logo,

$$\frac{2MC}{2AM} = \frac{2AM}{2MD} \text{ ou } \frac{MC}{AM} = \frac{AM}{MD},$$

de onde obtém-se

$$AM^2 = MC \cdot MD.$$

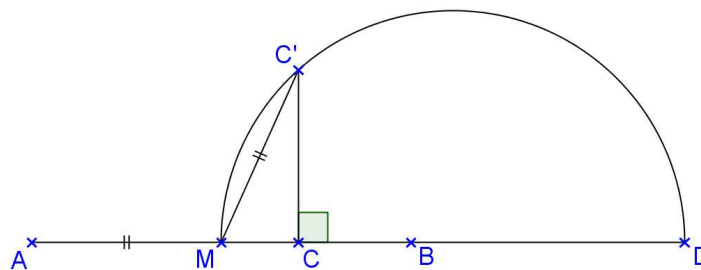


Figura 3.3 - Média proporcional entre MC e MD

Reciprocamente, a relação $AM^2 = MC \cdot MD$ prova que AB, do qual M é ponto médio, encontra-se dividido harmonicamente pelos pontos C e D.

PROPRIEDADE 4

Em qualquer triângulo, os dois lados compreendidos por um ângulo, a bissetriz deste ângulo e a bissetriz do seu suplemento determinam uma divisão harmônica sobre o terceiro lado.

Demonstração:

Seja ABC um triângulo e CP e CQ as bissetrizes do ângulo C e do seu suplemento (figura 3.4). Cada bissetriz determina dois segmentos cuja razão é igual à razão determinada pelos lados CA e CB (Teorema de Tales). Logo, das razões

$$\frac{CA}{CB} = \frac{PA}{PB} \text{ e } \frac{CA}{CB} = \frac{QA}{QB},$$

obtem-se:

$$\frac{PA}{PB} = \frac{QA}{QB}.$$

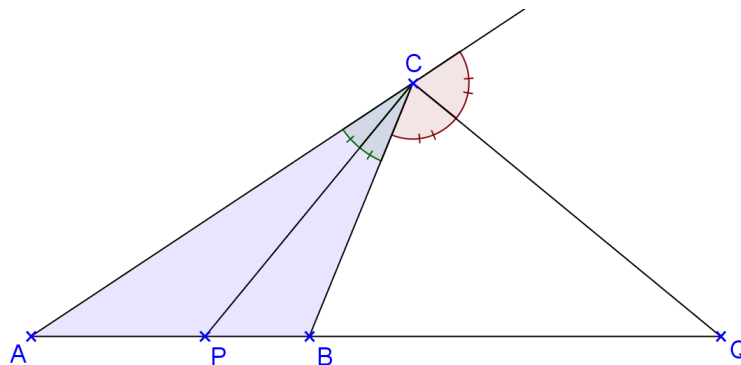


Figura 3.4 – Divisão harmônica em um triângulo ABC

Reciprocamente, se dois raios CP e CQ, sendo os pontos P e Q conjugados harmônicos de dois pontos A e B dados, são perpendiculares entre si, então eles são bissetrizes dos ângulos formados pelos dois outros raios CA e CB.

PROPRIEDADE 5

Em todo quadrilátero completo, cada diagonal é dividida harmonicamente pelas outras duas.

Para que se demonstre esta propriedade, deve-se primeiro conhecer os teoremas de Menelaus e Ceva.

TEOREMA DE MENELAUS

Qualquer transversal que intercepta os três lados de um triângulo determina seis segmentos tais que o produto de três dentre eles, não tendo extremidade em comum, é igual ao produto dos outros três.

Demonstração:

Seja AD a paralela à transversal LMN, que intercepta os lados do triângulo ABC nos pontos L, M e N respectivamente (figura 3.5). As paralelas AD e LM cortam as secantes BA e BD segundo segmentos proporcionais, logo,

$$\frac{LA}{LB} = \frac{MD}{MB} \quad \therefore MD = \frac{LA \cdot MB}{LB}. \quad (46)$$

As paralelas AD e LM cortam as secantes CM e CN segundo segmentos proporcionais. Logo,

$$\frac{MD}{MC} = \frac{NA}{NC} \quad \therefore MD = \frac{NA \cdot MC}{NC}. \quad (47)$$

Das igualdades (46) e (47) obtém-se que:

$$\frac{LA \cdot MB}{LB} = \frac{NA \cdot MC}{NC} \quad \therefore \frac{LA}{LB} \cdot \frac{MB}{MC} \cdot \frac{NC}{NA} = 1 \quad \text{ou} \quad LA \cdot MB \cdot NC = LB \cdot MC \cdot NA.$$

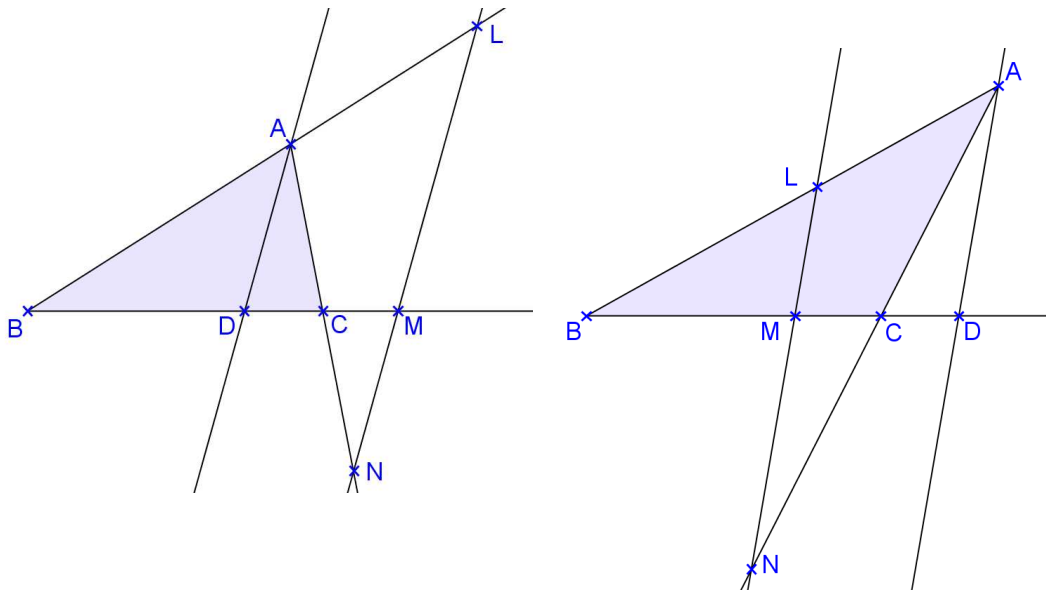


Figura 3.5 - Teorema de Menelaus

TEOREMA DE CEVA

As retas que unem os vértices de um triângulo ABC a um mesmo ponto O, determinam sobre os lados desse triângulo seis segmentos tais que o produto de três dentre eles, não tendo extremidade em comum, é igual ao produto dos outros três.

Demonstração:

Seja a transversal OC, que intercepta os lados do triângulo AMB nos pontos L, O e C respectivamente (figura 3.6). Pelo Teorema de Menelaus, tem-se

$$\frac{LA}{LB} \cdot \frac{OM}{OA} \cdot \frac{CB}{CM} = 1, \quad (48)$$

Seja a transversal OB, que intercepta os lados do triângulo AMC nos pontos N, O e B, respectivamente. Pelo Teorema de Menelaus, tem-se

$$\frac{BM}{BC} \cdot \frac{NC}{NA} \cdot \frac{OA}{OM} = 1, \quad (49)$$

Multiplicando-se, membro a membro as igualdades (48) e (49), tem-se a seguinte igualdade:

$$\frac{LA}{LB} \cdot \frac{MB}{MC} \cdot \frac{NC}{NA} = -1, \text{ ou seja, } LA \cdot MB \cdot NC = -LB \cdot MC \cdot NA.$$

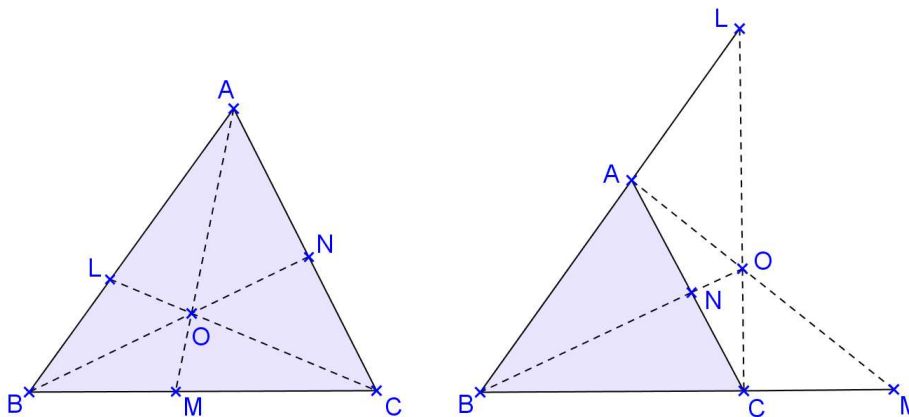


Figura 3.6 – Teorema de Ceva

Voltando à Propriedade 5:

Demonstração da Propriedade 5:

Seja o quadrilátero completo ABCDEF de diagonais AC, BD e EF (figura 3.7). A diagonal AC, por exemplo, corta as diagonais BD e EF em pontos M e N, tais que os pontos A e C são conjugados harmônicos dos pontos M e N.

De fato, de acordo com o Teorema de Menelaus, a transversal ENF corta os lados do triângulo ACD segundo seis segmentos, tais que o produto de três dentre eles, não tendo extremidade em comum, é igual ao produto dos outros três. Logo,

$$\frac{NA}{NC} \cdot \frac{FC}{FD} \cdot \frac{ED}{EA} = 1.$$

De acordo com o Teorema de Ceva, as retas que são definidas pelo ponto B e os vértices do triângulo ACD, determinam sobre os lados desse triângulo seis segmentos, tais que o produto de três desses segmentos, não tendo extremidade em comum, é igual ao produto dos outros três. Logo,

$$\frac{MA}{MC} \cdot \frac{FC}{FD} \cdot \frac{ED}{EA} = -1.$$

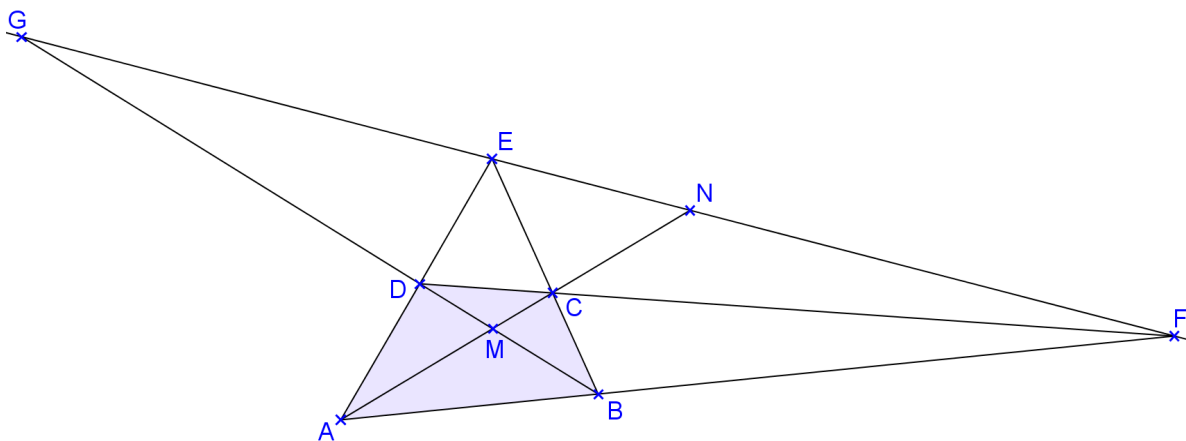


Figura 3.7 - Propriedade para quadrilátero completo ABCD

Multiplicando-se, membro a membro, as relações obtidas pelo Teorema de Menelaus e Ceva, obtém-se:

$$\frac{MA}{MC} = -\frac{NA}{NC}.$$

Portanto, em todo quadrilátero completo, cada diagonal é dividida harmonicamente pelas outras diagonais.

3.3.2. FEIXES ANARMÔNICOS, FEIXES HARMÔNICOS E SUAS PROPRIEDADES

DEFINIÇÃO

Denomina-se feixe anarmônico ao feixe constituído de quatro retas coplanares concorrentes em um só ponto.

PROPRIEDADE 1

Toda transversal que intercepta um feixe anarmônico determina quatro pontos cuja razão anarmônica é constante.

Demonstração:

Seja o feixe anarmônico de centro O , que intercepta as transversais s e s' , respectivamente, nos pontos correspondentes A e A' , B e B' , C e C' , e D e D' (figura 3.8).

Sabe-se que

$$(ABCD) = \frac{CM}{CN} \text{ e } (A'B'C'D') = \frac{C'M'}{C'N'}$$

mas as paralelas CM e $C'M'$ são interceptadas em partes proporcionais (Teorema de Tales) pelas retas do feixe de centro O . Portanto,

$$\frac{CM}{CN} = \frac{C'M'}{C'N'}$$

Logo, $(ABCD) = (A'B'C'D')$.

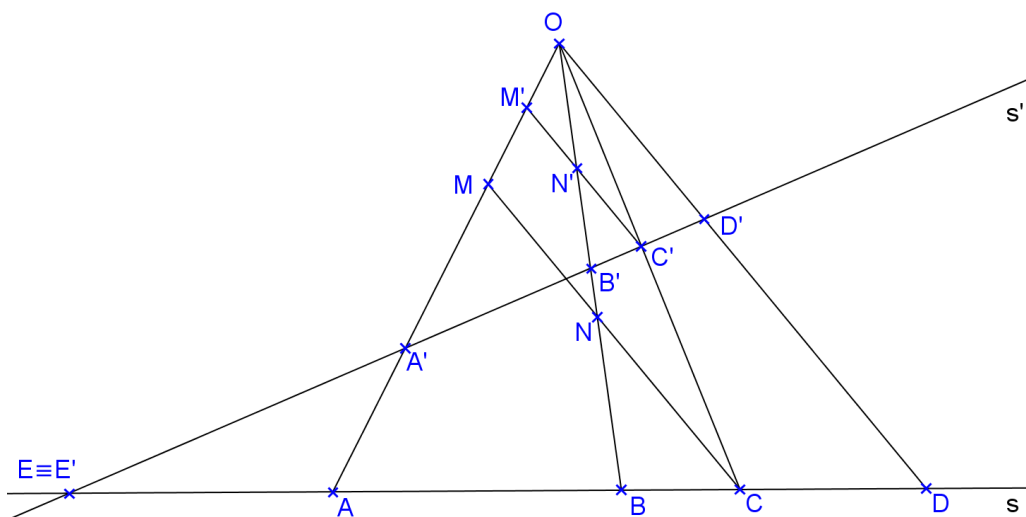


Figura 3.8 - Feixe anarmônico

PROPRIEDADE 2

Toda transversal paralela a um dos raios de um feixe harmônico é dividida em duas partes iguais pelos outros raios.

Demonstração:

Seja BQ a paralela ao raio AO (figura 3.9). Das seguintes semelhanças de triângulos $\triangle AOC \sim \triangle ABCQ$ e $\triangle AOD \sim \triangle BPD$, resultam as proporções:

$$\frac{AO}{BQ} = -\frac{CA}{CB} \text{ e } \frac{AO}{BP} = \frac{DA}{DB}$$

Porém, $-\frac{CA}{CB} = \frac{DA}{DB}$, pois o feixe $(O, ABCD)$ é harmônico. Logo, $\frac{AO}{BQ} = \frac{AO}{BP}$, ou seja, os segmentos BQ e BP são iguais.

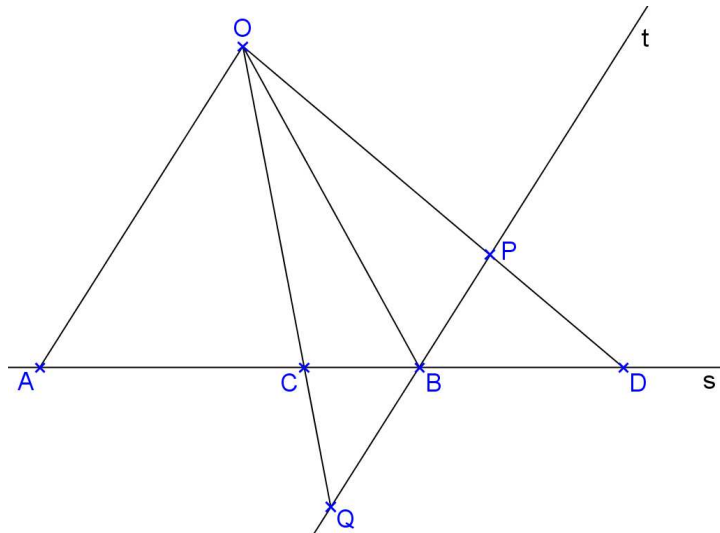


Figura 3.9 - Feixe harmônico

PROPRIEDADE 3

Um feixe de quatro retas é harmônico, quando uma paralela a um dos raios está dividida em duas partes iguais pelos outros raios.

Demonstração:

Seja BQ a paralela ao raio AO e $BQ = -BP$ (figura 3.9). Dos triângulos semelhantes $\triangle AOC$ e $\triangle BCQ$, resultam as proporções:

$$\frac{AO}{BQ} = -\frac{CA}{CB} \text{ e } \frac{AO}{BP} = \frac{DA}{DB},$$

mas $BQ = -BP$. Logo:

$$\frac{AO}{BQ} = \frac{AO}{BP} \text{ e } \frac{CA}{CB} = -\frac{DA}{DB},$$

portanto, a transversal AB está dividida harmonicamente pelos pontos C e D.

3.4. PROPRIEDADES SOBRE PÓLO E POLAR**PROPRIEDADE 1**

O lugar geométrico do ponto Q, conjugado harmônico de um ponto dado P em relação a duas retas concorrentes dadas e das secantes traçadas por este ponto, compõe-se de uma reta p que contém o ponto de concurso das retas dadas.

Demonstração:

Sejam AO e OB as retas dadas (figura 3.10). Se Q é conjugado harmônico do ponto P, então o feixe $(O, ABPQ)$ é harmônico, e qualquer secante conduzida pelo ponto P será dividida harmonicamente pelos raios deste feixe.

Esta propriedade é consequência imediata da Propriedade 1 de feixes anarmônicos (Seção 3.3.2).

Demonstração:

Seja Q o ponto tal que $OQ \cdot OP = OA^2$ (figura 3.11). Deste modo, os pontos P e Q são conjugados harmônicos dos pontos A e B. Sejam, ainda, as retas QD e QC. A circunferência de centro O e diâmetro AB é o lugar geométrico dos pontos C cujas distâncias aos pontos P e Q estão na razão constante $\frac{BQ}{BP}$.

Portanto, a reta BC é a bissetriz do $\angle DCF$. Por conseguinte, os arcos BD e BF são iguais. Logo, $\angle BQD = \angle BQF$, isto é, a reta BQ é a bissetriz do $\angle DQF$ (Propriedade 4 de Razões Harmônicas), e a bissetriz do $\angle DQC$ é perpendicular à reta PQ.

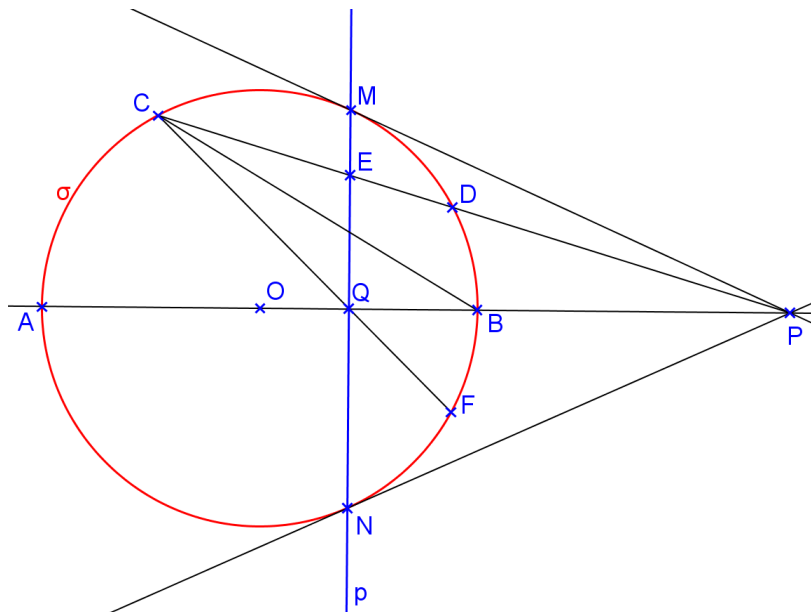


Figura 3.11 - Propriedade de feixes harmônicos

O feixe (Q, CDEP) é harmônico, portanto, a corda CD é dividida harmonicamente pelos pontos E e P (Propriedade 1 de Feixes Anarmônicos). Logo, a perpendicular QE é o lugar geométrico dos conjugados harmônicos do ponto dado P.

DEFINIÇÃO

O ponto P é denominado pólo da reta p em relação ao círculo de centro O e raio OA. A perpendicular p à reta AB é a polar do ponto P em relação ao círculo de centro O e raio OA.

Os pontos P e Q são recíprocos (ou inversos) em relação ao círculo de centro O a raio OA, pois $OQ \cdot OP = OM^2 = OA^2$.

OBSERVAÇÕES

1. Quando o pólo tende ao infinito, a polar tende a conter o centro do círculo; quando o pólo é ponto da circunferência desse círculo, a polar contém o pólo, isto é, é tangente ao círculo; quando o pólo tende para o centro do círculo, a polar tende ao infinito.
2. Os pontos de contato das tangentes conduzidas por P ao círculo pertencem à polar de P.

PROPRIEDADE 4

Se por um ponto dado, conduz-se duas secantes quaisquer, as retas que unem duas a duas as extremidades das cordas se cortam sobre a polar do ponto dado; as tangentes à circunferência, conduzidas pelas extremidades de cada corda também se cortam sobre a polar.

Demonstração:

Os pontos Q e H, conjugados harmônicos de pólo P em relação aos pontos A, B e C, D, respectivamente (figura 3.12), determinam a polar p, e esta reta deve conter o ponto F do quadrilátero completo ABDCFP e o ponto diagonal G (Propriedade 5 de Razões Harmônicas).

Deste modo, a polar p é o lugar geométrico dos pontos de concurso F e G das retas que unem duas a duas as extremidades das cordas AB e CD.

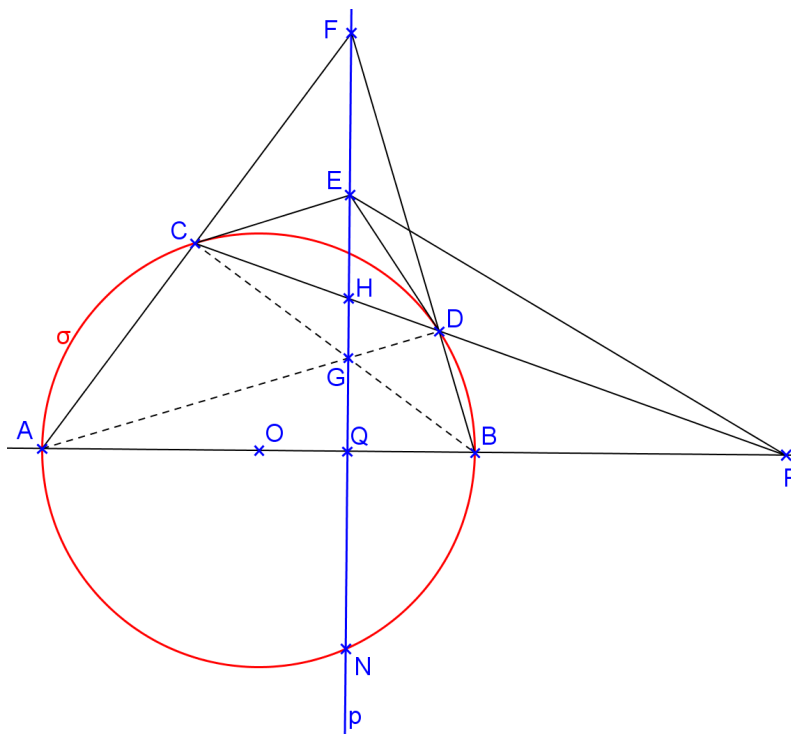


Figura 3.12 - Propriedade de feixes harmônicos

Analogamente, quando a corda AB tende para CD, os pontos A e B tendem, respectivamente, para C e D, e as secantes AC e BD tendem para as tangentes; logo, a polar é o lugar geométrico do ponto de concurso das tangentes.

OBSERVAÇÕES

1. Quando dos diversos pontos F, de uma polar p, conduzem-se pares de tangentes a um círculo dado, as cordas definidas pelos pontos de contatos contém o pólo P da polar considerada.
2. Os pontos A, B e C são respectivamente os pólos das polares a, b e c (figura 3.13). O triângulo ABC é denominado auto-polar do círculo de centro O. Esse triângulo é obtusângulo, sendo que o vértice do ângulo obtuso pertence ao círculo, enquanto os dois outros são exteriores. O círculo σ , de centro O, é denominado círculo polar do triângulo ABC. Todo triângulo obtusângulo tem um só círculo polar cujo centro O coincide com o ortocentro do triângulo e cujo raio k é dado por:

$$k = \sqrt{OA \cdot OH_a} = \sqrt{OB \cdot OH_b} = \sqrt{OC \cdot OH_c}$$

pois os pontos H_a , H_b e H_c são, respectivamente, inversos dos pontos A , B e C , na inversão de centro O e círculo fundamental σ . Essa inversão transforma a circunferência circunscrita ao triângulo obtusângulo ABC na circunferência dos nove pontos, e a circunferência dos nove pontos na circunferência circunscrita.

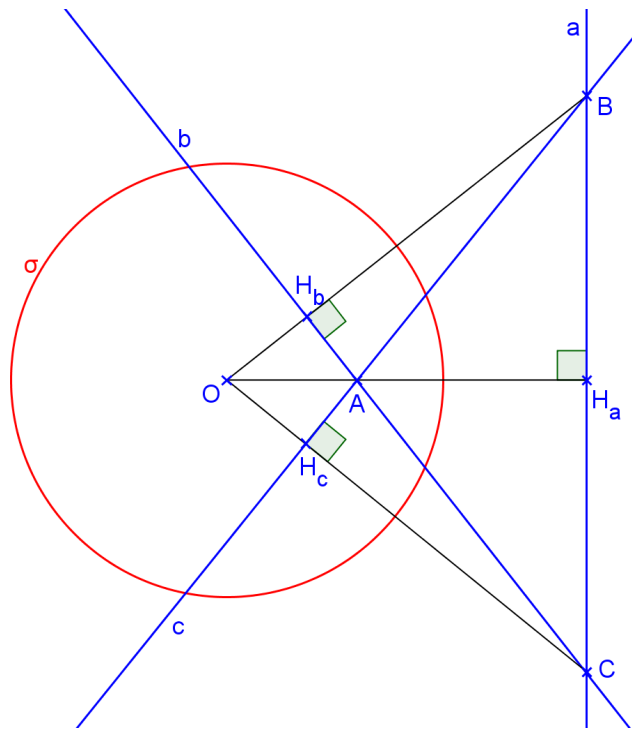


Figura 3.13 - Triângulo auto-polar

Logo, o círculo polar é um dos círculos que transforma a circunferência dos nove pontos na circunferência circunscrita, mediante inversão. Deste modo, a circunferência dos nove pontos não contém somente nove, mas sim onze pontos notáveis, sendo os dois últimos os pontos de interseção da circunferência circunscrita com a circunferência polar.

3.5. RECIPROCIDADE POLAR

A reciprocidade polar é uma correspondência que transforma, respectivamente, pontos e retas nas suas polares e nos seus pólos.

PROPRIEDADE

Seja um círculo σ de centro O e raio k . As polares dos diversos pontos de uma reta, em relação ao círculo dado, contém o pólo dessa reta, e os pólos das diversas retas conduzidas por um mesmo ponto pertencem à polar desse ponto.

Demonstração:

Seja p a polar de um ponto dado P em relação a um círculo dado (figura 3.14). Para o ponto Q , recíproco do ponto P , a polar q é perpendicular à reta OP . Para qualquer ponto C da reta p , a polar será perpendicular à reta OC , e o ponto D , projeção ortogonal do ponto O sobre a reta OC , será dado pela relação $OD \cdot OC = k^2$.

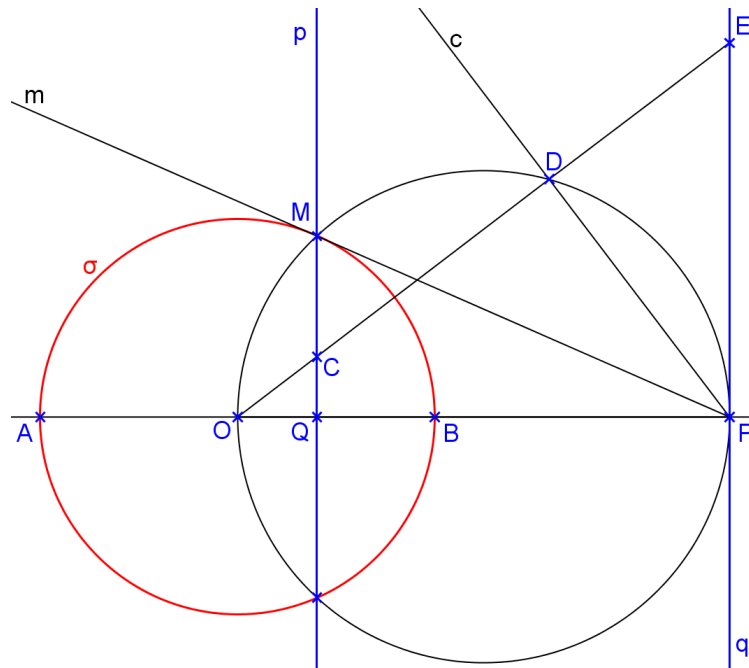


Figura 3.14 - Reciprocidade polar

Porém, se do ponto P conduz-se a perpendicular PD à OC, então da semelhança dos triângulos $\triangle OQC$ e $\triangle ODP$ resulta $\frac{OQ}{OD} = \frac{OC}{OP}$, ou $OC \cdot OD = OQ \cdot OP$. Logo, $OC \cdot OD = k^2$. Portanto, a reta PD é a polar do ponto C.

Analogamente, demonstra-se que MP é a polar do ponto M. Reciprocamente, os pólos Q, C e M das retas PE, PD e PM, que contém o ponto P, pertencem à polar p do ponto P.

3.6. AS CÔNICAS CONSIDERADAS COMO RECÍPROCAS POLARES DA CIRCUNFERÊNCIA

Uma circunferência α pode ser considerada como um lugar geométrico constituído dos pontos ou como uma curva envolvida das tangentes. Deste modo, as tangentes são as polares dos pontos da circunferência e os pólos são os pontos da circunferência.

Descrever uma cônica como recíproca de uma circunferência dada α , significa que ela tanto é o lugar geométrico dos pólos das tangentes a α , quanto é a envolvida das polares dos pontos da circunferência α . A recíproca de uma circunferência de centro A e raio r, em relação a uma circunferência σ , de centro O e raio k, é uma cônica.

O raio k determina somente o tamanho da cônica, mas não a sua forma. A forma da cônica é determinada pela razão $\varepsilon = \frac{OA}{r}$, a qual é denominada excentricidade da cônica de foco O. Esse foco pode pertencer ou não ao círculo determinado por α . Deste modo, tem-se três casos a se considerar.

1º caso

Quando O pertence ao círculo dado α , tem-se $\varepsilon < 1$, e existe um ponto da cônica para qualquer raio de origem O . Logo, a cônica é uma curva fechada, denominada elipse (figura 3.15).

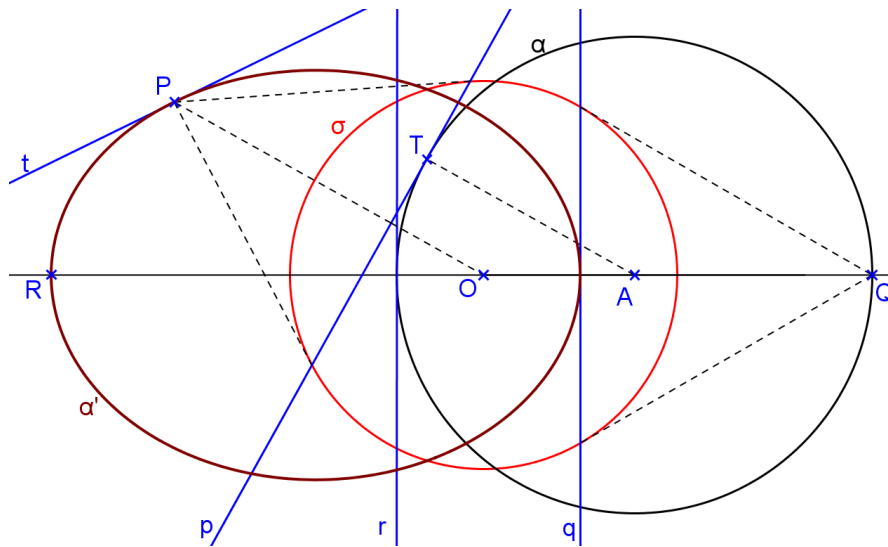


Figura 3.15 – Caso da elipse

2º caso

Quando O pertence à circunferência α , tem-se $\varepsilon = 1$, e a circunferência α tem um ponto, no caso O , o qual não tem polar em relação à circunferência σ (figura 3.16).

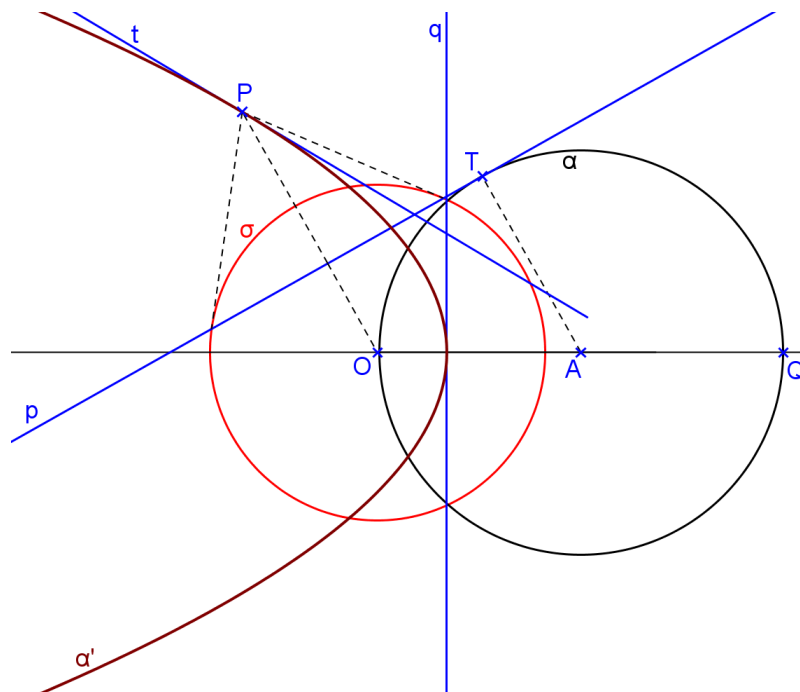


Figura 3.16 - Caso da parábola

Do mesmo modo, a tangente a α , conduzida por O , não tem polo. Consequentemente, a cônica é uma curva aberta, de um só ramo, que se estende infinitamente na direção AO . Esta cônica é denominada parábola.

3º caso

Quando o centro O não pertence ao círculo α , tem-se $\varepsilon > 1$, e a cônica é denominada hipérbole (figura 3.17).

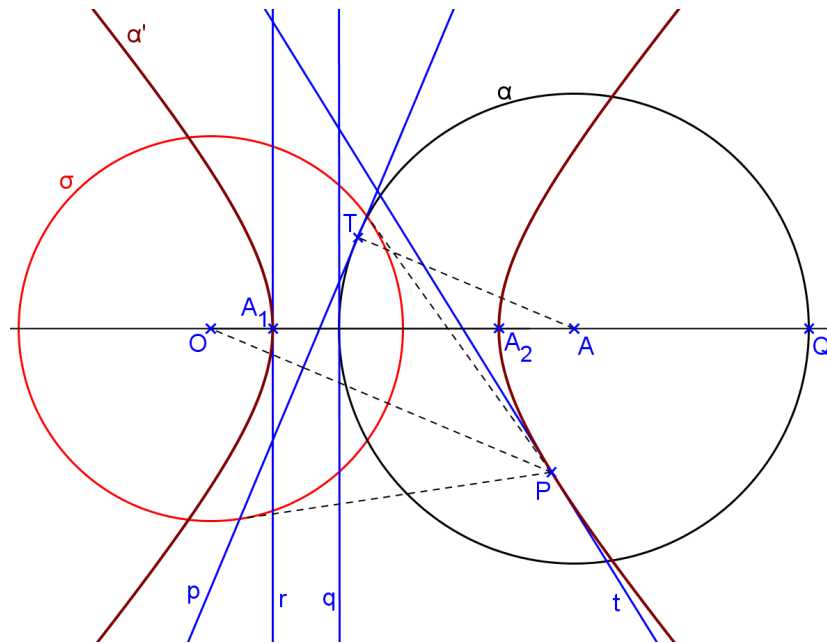


Figura 3.17 - Caso da hipérbole

O ponto médio de A_1A_2 é o centro da hipérbole M . As tangentes a α , conduzidas por M , possuem pólos impróprios, cujas direções são dadas pelas polares, b e c , dos pontos de tangência B e C . Para encontrar os pontos B e C , basta traçar a reta polar m do centro M da hipérbole. Deste modo, a curva é aberta e possui dois ramos. Estas polares, b e c , pertencem ao conjunto das envolventes à curva, e são, portanto, tangentes à curva em pontos impróprios. Logo, b e c são as assíntotas da hipérbole (figura 3.18).

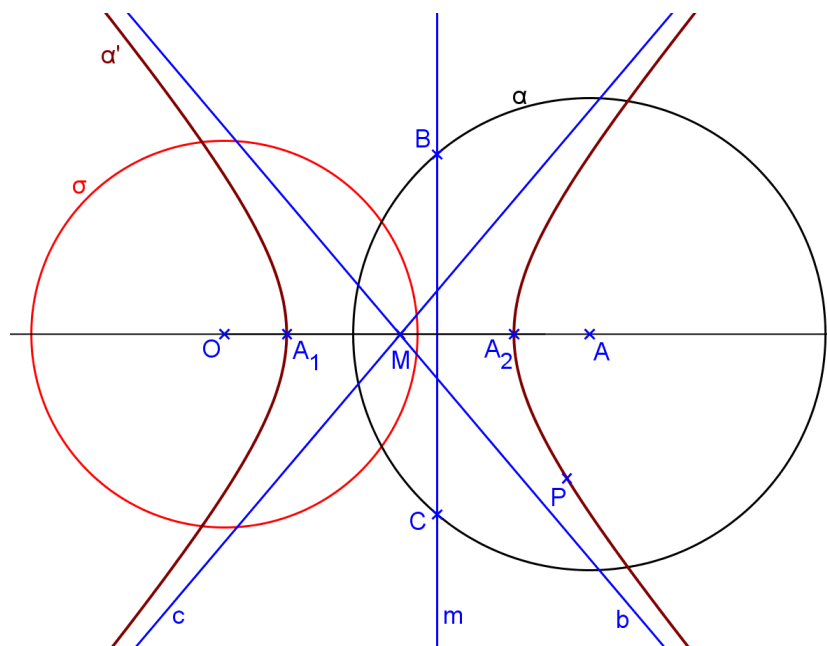


Figura 3.18 - Assíntotas da hipérbole

OBSERVAÇÕES

1. Para a parábola, o lugar geométrico das projeções ortogonais dos focos sobre as tangentes é uma reta, pois cada tangente t à parábola é a polar de um ponto T da circunferência α . A projeção ortogonal do foco O sobre a reta t é o recíproco do ponto T em relação ao círculo fundamental σ . Como o lugar geométrico do ponto T é uma circunferência α , que contém O , sua recíproca compõe-se de uma reta.
2. Para a elipse e a hipérbole, o lugar geométrico das projeções ortogonais dos focos sobre as tangentes é uma circunferência, pois cada tangente t a essas cônicas é a polar de um ponto T da circunferência α . A projeção ortogonal do foco O sobre a tangente t é o recíproco de T em relação ao círculo σ . Como o lugar geométrico de T é uma circunferência α , que não contém O , sua recíproca será uma circunferência.

3.6.1. DEFINIÇÃO GERAL PARA CÔNICAS

Quando uma cônica é definida como a recíproca de uma circunferência α de centro A , a polar de A em relação ao círculo σ é a diretriz da cônica.

Para qualquer ponto P de uma cônica de excentricidade ε , foco O e diretriz a , o quociente da distância OP e da distância do ponto P à diretriz é igual a ε (figura 3.19). De fato, o ponto P é o pólo, em relação a σ , da tangente p à circunferência α em T , a qual corta as retas OA e OP nos pontos M e P' , respectivamente. A diretriz e a polar de M cortam OA em A' e M' . O ponto Q é a projeção ortogonal de P sobre a polar a . Considerando k e r como raios dos círculos σ e α e que OM e OA são segmentos orientados de origem O , obtém-se a seguinte igualdade:

$$\frac{PQ}{OP} = \frac{OA' - OM'}{OP}, \quad (50)$$

Como A' , M' e P' são, respectivamente, recíprocos dos pontos A , M e P em relação à circunferência de centro O e raio k , tem-se:

$$OP' \cdot OP = OA \cdot OA' = OM \cdot OM' = k^2.$$

Multiplicando-se a igualdade (50) por k^2 , obtém-se

$$\frac{PQ}{OP} = \frac{k^2}{OP} \left[\frac{OA' - OM'}{k^2} \right].$$

Substituindo os valores de OP' , OA e OM na igualdade acima, obtém-se:

$$\frac{k^2}{OP} \left[\frac{OA' - OM'}{k^2} \right] = OP' \left[\frac{1}{OA} - \frac{1}{OM} \right],$$

ou, de outro modo,

$$OP' \left[\frac{1}{OA} - \frac{1}{OM} \right] = \frac{OP'}{OM} \left[\frac{OM}{OA} - 1 \right].$$

Da semelhança dos triângulos $\triangle OMP'$ e $\triangle AMT$, tem-se que $\frac{OP'}{OM} = \frac{AT}{AM}$. Portanto,

$$\frac{OP'}{OM} \left[\frac{OM}{OA} - 1 \right] = \frac{AT}{AM} \left[\frac{OM - OA}{OA} \right]$$

Como os segmentos OM e OA são orientados, tem-se que $OM - OA = AM$. Logo,

$$\frac{AT}{AM} \left[\frac{OM - OA}{OA} \right] = \frac{AT}{AM} \cdot \frac{AM}{OA}.$$

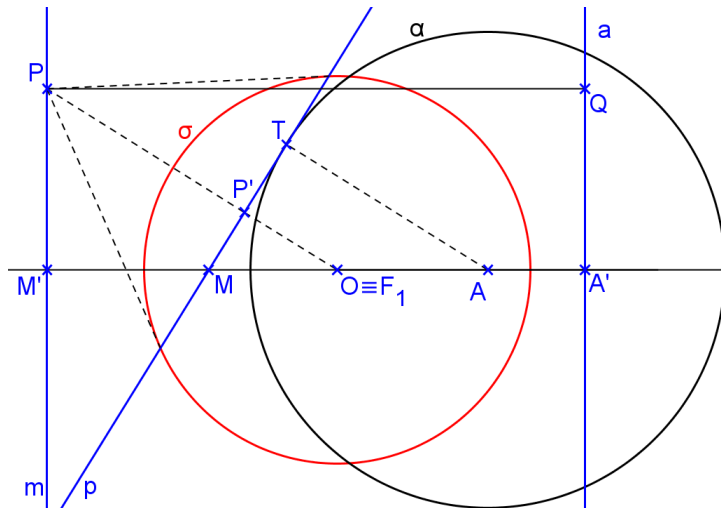


Figura 3.19 - Definição geral de cônicas

Como $AT = r$, obtém-se

$$\frac{AT}{AM} \cdot \frac{AM}{OA} = \frac{r}{OA}.$$

Mas $\frac{OA}{r}$ é a excentricidade da cônica considerada. Logo,

$$\frac{PQ}{OP} = \frac{r}{OA} = \frac{1}{\varepsilon}.$$

Portanto, $OP = \varepsilon \cdot PQ$ e a cônica pode ser definida como o lugar geométrico dos pontos cujas distâncias a um ponto dado (chamado foco) e uma reta (chamada diretriz) têm a razão constante e igual à excentricidade. Esta é a definição geral para cônicas dada por Poncelet.

3.7. PROBLEMAS

1. Encontrar a cônica recíproca de uma circunferência dada em relação a um círculo dado. Obter uma diretriz dessa cônica.

Solução: O centro do círculo dado é um dos focos dessa cônica. Em qualquer um dos casos, a reta que passa pelos centros das circunferências consideradas será o eixo principal da cônica. Um vértice da cônica estará na interseção do eixo com a polar do ponto Q (figuras 3.15, 3.16, 3.17 e 3.18).

2. Obter a polar de um ponto dado em relação a uma cônica dada.

Solução: A polar é determinada pelos pontos de tangência das tangentes conduzidas pelo pólo dado à cônica dada.

3. Obter o pólo de uma reta dada em relação a uma cônica dada.

Solução: O pólo é o ponto de concurso das tangentes à cônica conduzidas pelos pontos de interseção da reta dada com a cônica dada.

REFERÊNCIAS

1. Costa, A. M. Métodos Geométricos - Homologia, UFPR, 1990.
2. Herszkowicz, G. Curso Universitário
3. Marmo, C. M. B. Curso de Desenho, Editora Moderna, 1974.
4. Rodrigues, A. J. Geometria Descritiva, Projetividade, Curvas e Superfícies, Ao Livro Técnico, 1969.
5. Tanner, J. H.; Allen, J. An Elementary Course in Analytic Geometry, American Book Company, 1898.