



A VISUALIZAÇÃO COMO FATOR DE RUPTURA NOS CONCEITOS GEOMÉTRICOS

Iolanda Andrade Campos Almeida

UFPE - Universidade Federal de Pernambuco, Departamento de Expressão
Gráfica

iolanda@hotmail.com.br

Marcelo Câmara dos Santos

UFPE - Universidade Federal de Pernambuco, Departamento CAP
marcelocamaraufpe@yahoo.com.br

RESUMO

A representação de um objeto pode ser considerada como sendo um dos focos de interesse da geometria gráfica. Como o processo de representação envolve questões pertinentes à visualização que se constrói sobre esse objeto, quer seja pela interpretação da imagem mental que se formula sobre o objeto ou como organiza um desenho que expresse a interpretação, teóricos do desenvolvimento do pensamento geométrico postulam que esta visualização interfere no próprio desenvolvimento cognitivo. Com base nesses estudos e considerando a dificuldade apresentada pelos indivíduos quando vão resolver problemas de construção geométrica, levantamos a hipótese que alguns erros apresentados são provenientes da visualização, entendendo que o resultado da visualização pode promover rupturas entre significados e significantes dos conceitos geométricos exigidos em traçados de construções geométricas. Neste artigo apresentamos algumas evidências identificadas dessa ruptura, ao analisarmos as ações de um grupo de sujeitos em um teste proposto para resolução de problemas geométricos. Os resultados mostram que a questão da visualização tem um papel predominante sobre as ações, mas que as metodologias também interferem. Concluindo-se que é necessário uma revisão metodológica sobre os procedimentos adotados atualmente no ensino de modo a harmonizar metodologias e mídias de obtenção de figuras geométricas.

Palavras-chave: construções geométricas, visualização, representações e percepção.

ABSTRACT

An object representation can be considered as being one of the focuses of interest of graphic geometry. As the representation process involves pertinent questions to the visualization that is built on that object, as for the interpretation of the mental image that it is formulated on this object or that it organizes a drawing to express that interpretation, theoretic of the development of geometric thought postulates that this visualization interferes in the own cognitive development. Based in those studies and considering the difficulty presented by the individuals when solving problems of geometric construction, we developed the hypothesis that some mistakes presented are due to visualization, understanding that the result of visualization can promote ruptures among meanings and significant of the geometric concepts demanded in drawings of geometric constructions. In this article we will present some identified evidences of that rupture, when we analyze the actions of a group of subjects in a test proposed for resolution of geometric problems. The results show that the question of visualization has a predominant hole over the actions, but that the methodologies also interfere. We conclude that it is necessary a methodological review on the procedures adopted nowadays in the teaching in order to harmonize methodologies and media of obtaining geometric illustrations.

Key-words: constructions, visualization, representations and perception.

1 Introdução

Em função da natureza do conhecimento geométrico, a representação e a interpretação da figura que corresponde a imagem do objeto matemático se torna um dos aspectos mais relevantes no estudo da geometria gráfica. Codificar ou decodificar essa representação por meio de traçados, apesar de implicar num domínio das propriedades inerentes ao objeto geométrico em estudo e de técnicas oriundas do recurso empregado, envolve também questões pertinentes à forma como o indivíduo apreende em sua mente esse objeto matemático, que acontece por meio da percepção.

Pelo fato da geometria gráfica ser um conhecimento que privilegia a 'forma'¹, a visualização, que é um dos principais canais da percepção, se torna um dos pilares na aprendizagem dos conceitos geométricos.

Autores como Duval (1995, 2003), Fischbein (1993) e Van Hiele (1986), que desenvolveram teorias sobre o processo de raciocínio em geometria, apontam para a complexidade da maneira pela qual a forma do objeto é interpretada na mente humana, afirmando que esta influencia na própria cognição em geometria.

¹ O termo 'forma' está sendo empregado no sentido de configurar um modelo que expressa dados qualitativos e quantitativos do objeto geométrico, que expressa por meio de um modelo a representação de uma idéia matemática.

Dessa forma, para esses autores, um estudo envolvendo figuras geométricas necessariamente deve levantar considerações o aspecto da visualização, uma vez que todo o raciocínio a ser desenvolvido pelo indivíduo vai ser estruturado a partir da interpretação que este faz da imagem do modelo geométrico, tanto no que se refere a imagem mental como por meio de um diagrama ou por um modelo concreto.

Assim, seja qual for à natureza da figura geométrica, ao se fazer a sua representação, seja ela de caráter estritamente mental ou concretizado por meio de um desenho, a esta figura vai estar associado o conceito que se tem sobre ela.

Ocorre que uma representação pode, por vezes, ser associada a outros modelos, devido à própria característica de como a representação se processa ou porque um dado objeto faz parte de uma determinada classe, implicando em certas similaridades que camuflam ou confundem a individualização do objeto.

Portanto, uma representação terá uma maior penetração quanto maior for o grau de pregnância que permita um maior número de indivíduos captar suas características, ou seja, as propriedades inerentes ao objeto representado.

No entanto, outros fatores podem vir a interferir na identificação do modelo, dependendo de um referencial que se adota, da ênfase que se assume para certos elementos, de experiências anteriores, etc. Por exemplo, na Fig. 01 algumas pessoas podem ver o desenho de uma escada vista de cima, vista por baixo ou um conjunto de linhas.

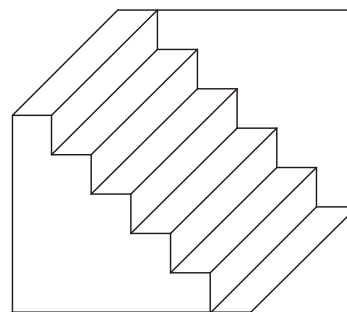


Fig. 01: Desenho que pode representar uma escada vista por cima ou por baixo.

O fato de uma mesma representação estar associada a diferentes objetos ou situações pode ser conseqüência, não só do conhecimento do indivíduo sobre o objeto representado ou dos métodos de representação, mas, também, das próprias distorções oriundas do órgão da visão do homem. Pois, muitas vezes, o indivíduo acredita estar vendo uma determinada situação e, de fato, esta é bem diferente do que é na realidade.

O que ocorre é que nem sempre se vê o que está sendo olhado, isto é, pelo cérebro de um indivíduo ter aprendido a ver ou perceber os objetos sob um certo prisma, ele automaticamente reage conforme o esperado sob determinadas condições. Essa combinação entre a aprendizagem individual do perceber no ato de ver ou das próprias limitações do aparato visual do homem, promove erros de interpretação sobre um objeto que se observa.

Alguns desses erros são provenientes das chamadas ilusões de óptica. Por exemplo, na Fig. 02. a percepção que invariavelmente se tem é que as três figuras possuem medidas diferentes, e na

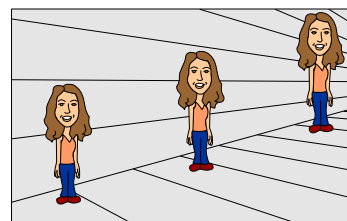


Fig. 02: Identificam-se as figuras com medidas diferentes em função do efeito de perspectiva do desenho.

realidade elas são iguais.

A interpretação errada é devido ao efeito de perspectiva das linhas que agenciam o desenho, induzirem a um efeito de profundidade. Resultando que o cérebro entende que as figuras estão aumentando de dimensão devido ao efeito de perspectiva que a visão capta.

O cérebro também é capaz de complementar objetos geométricos, mesmo que estes não existam. A fig. 03 ilustra esse fato, mostrando uma versão do triângulo de Kanizsa, em que se percebe a existência de dois triângulos sobrepostos, sem que se tenham os lados deles desenhados.

O fato é que o cérebro vê coisas que diferem da realidade, em função do próprio órgão da visão, das emoções, de experiências anteriores, dos processos de aprendizagens, da cultura e de inúmeros outros fatores.

Adotando a concepção proposta por Vergnaud (1996) de que um conceito sobre algo se forma pela relação entre as situações em que este conceito é evocado de forma significativa, pelos invariantes que dão exatamente o significado ao conceito e as representações a que estes estão passíveis, expressos por meio de ícones, signos ou símbolos, constituindo-se nos significantes desse conceito; entende-se que é necessária uma perfeita interação entre esta representação e os significados que o indivíduo assume sobre os conceitos, para que não ocorram equívocos na construção do conceito.

Como o estudo da geometria gráfica utiliza significativamente a percepção no entendimento dos objetos geométricos, por ser a representação do objeto geométrico o principal objetivo neste campo de saber, inevitavelmente certos erros apresentados pelos alunos devem ser provenientes de rupturas entre os significados e significantes do objeto geométrico em estudo, ocasionado por percepções que se mostram contraditórias ou equivocadas em relação ao referente.

Partindo desse pressuposto, fizemos uma investigação para identificar as interferências da visualização de um objeto geométrico quando se está resolvendo problemas de construções geométricas, com o objetivo de constatar a relação dos erros e dificuldades apresentadas por parte dos alunos devido aos equívocos provenientes da visualização.

2 Implementação da Investigação

Os dados apresentados neste artigo são provenientes da tese de doutorado desenvolvida por Almeida (2007), que tinha como hipótese a existência de rupturas entre significados e significantes dos conceitos que por consequência promoviam dificuldades e erros na resolução de problemas de construções geométricas. Aqui serão apresentados alguns dos aspectos levantados sobre as origens dos erros e que foram relacionados ao aspecto da visualização.

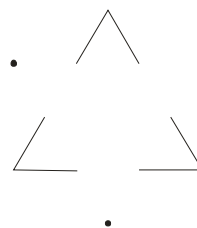


Fig. 03: Desenho que sugere a existência de dois triângulos sobrepostos.

O método adotado na tese consistiu em analisar os traçados e as justificativas para as ações feitas de um grupo de indivíduos, em que foram propostos dez problemas de traçados geométricos. O processo de construção contemplado foi com os tradicionais instrumentos de desenho. A justificativa de tal escolha é que nem todos os indivíduos investigados tinham domínio de *software* para traçados gráficos. Optando-se, assim, por um processo único de traçado para evitar que outras variáveis interferissem no julgamento de valores.

O grupo de indivíduos selecionado para proceder à investigação foi com alunos do curso de Licenciatura em Desenho e Plástica da Universidade Federal de Pernambuco – UFPE. A opção por esse grupo foi em função da familiaridade deles com os objetos geométricos e pelo nível de conhecimento que estes apresentam nessa área de conhecimento.

Para evitar situações que promovessem procedimentos mecânicos, oriundas de situações prototípicas ou anteriormente vivenciadas, na escolha dos problemas propostos houve uma certa cautela em torno dos enunciados, buscando-se situações inovadoras. Por outro lado, como não era interesse investigar a abrangência do campo conceitual dos indivíduos investigados, tomou-se a precaução dos problemas propostos contemplarem conceitos que não extrapolassem um nível de conhecimento já construído na formação dos indivíduos.

No intuito de entender melhor as ações e estratégias montadas pelos sujeitos ao resolverem os problemas propostos, foram feitos redesenhos dos traçados apresentados por cada um dos sujeitos que participaram dessa investigação. Esses redesenhos foram executados no AutoCAD para se ter uma uniformidade dos traçados, o que facilitaria na análise, bem como, para ilustrar as situações na edição desse trabalho, tendo-se o cuidado de ser o mais fiel possível ao original.

Para análise desses redesenhos foram criadas categorias de avaliação do conjunto de traçados apresentados. As categorias consideravam os resultados encontrados a partir das ações feitas. Ou seja, avaliamos os traçados apresentados na resolução dos problemas em função das escolhas feitas.

3 Evidências Identificadas da Influência da Visualização

Os problemas propostos no teste versam sobre construções geométricos bidimensionais, e foram baseados em exercícios de livros dos autores Carvalho (1986), Giongo (1975), Petersen (1963) e Loriggio (sd.). Delimitaram-se os conceitos envolvidos, basicamente, às propriedades de equidistância e marcação de ângulos, que fazem parte dos traçados fundamentais que são abordados na introdução do estudo da geometria bidimensional.

Como foi posto anteriormente, a análise em torno dos traçados considerou as implicações das visualizações sobre o objeto geométrico a ser construído com as escolhas dos sujeitos quando desenvolviam as estratégias para a resolução dos problemas que foram propostos.

Para orientar a análise foram formuladas categorias de avaliação do desempenho apresentado nas estratégias que foram adotadas pelos sujeitos. Essas categorias consistiram em demarcações de ações e intenções. Assim, procuramos indícios de influências nas estratégias em função da: (i) disposição dos dados. (ii) da concepção sobre a figura a ser

construída, (iii) do desenho que resultaria na resposta do problema e (iv) das propriedades acionadas e empregadas no método de resolução.

Pelos resultados apresentados, encontramos as seguintes evidências de interferência da visualização nas estratégias adotadas para resolução dos problemas propostos na investigação:

Em relação à habilidade de visualização em torno da possibilidade de prever a solução de um problema, verificamos que esta é freqüentemente evocada pelos sujeitos, pois independentemente de terem resolvido corretamente os problemas propostos as soluções apresentadas eram semelhantes às respostas corretas.

O que se observou é que alguns sujeitos ao resolverem os problemas apresentaram uma solução com ajuda dos instrumentos de desenho, adicionando elementos ou empregando sucessivos traçados que resultassem numa situação que atendia as exigências do enunciado e ao que se previa em termos da configuração da solução.

A resposta apresentada na Fig. 04 ilustra ações dessa natureza. Como este sujeito, vários outros, para resolver o problema, desenvolveram estratégias que buscavam um traçado para atingir a resposta que estava sendo prevista como solução.

Nos traçados, observa-se que algumas construções se reportam a propriedades pertinentes, mas o foco está, realmente, no objetivo de obter a imagem da resposta que foi visualizada, pois não consideram que as escolhas feitas não se fundamentam em nenhuma propriedade pertinente. Ou seja, as estratégias são construídas, freqüentemente, por tentativa e erro, empregando, por vezes, uma ajustagem com auxílio dos instrumentos de desenho.

Observamos, no entanto, que além do fato dessa visualização induzir ao erro, pois direciona as estratégias para atender a expectativa da solução prevista, ela promove outro tipo de equívoco, pois nem sempre são apresentadas todas as soluções de um problema. Verificamos isso em diversos problemas que foram propostos na investigação, inclusive este que é ilustrado na Fig. 04, pois ele admite duas soluções, e só foi identificada uma delas.

O argumento que fortalece essa conjectura é que mesmo quando alguns dos sujeitos resolviam o problema aplicando as propriedades corretas, nenhum deles apresentaram todas as soluções possíveis. Contudo, houve situações que ninguém resolveu corretamente o problema, mas nas respostas apresentadas mostravam que tinham a percepção das soluções possíveis, podendo-se inferir que existem fatores que realmente interferem no juízo de valores.

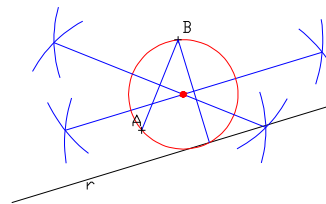


Fig. 04: A construção adotada associa as propriedades pertinentes com a expectativa da solução prevista.

Constatamos também que os instrumentos de desenho corroboram e auxiliam nesse processo de visualização. A prova disso é que alguns traçados foram caracterizados por ter os elementos obtidos sem utilizar as construções corretamente. Por exemplo, no problema de construção de um triângulo em que são estabelecidas as alturas em relação a um lado e uma outra em relação a um vértice, verificamos que para determinar a posição do lado em relação a altura do vértice, os sujeitos faziam um arco de circunferência para definir o lugar geométrico da distância da altura sem tomarem como referência uma reta perpendicular. A marcação da reta perpendicular é uma ação posterior que tem apenas a função ilustrativa, ou seja, o sujeito tem o cuidado de mostrar a propriedade das alturas encontradas estarem perpendiculares a seus respectivos lados, mas não levaram em consideração as condições necessárias para definir a posição precisa dessas alturas (Fig. 05).

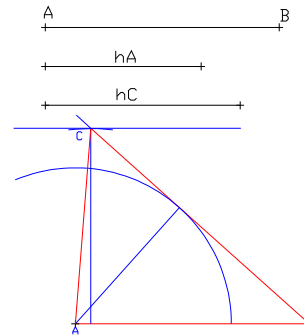


Fig. 05: A visualização é que define a posição do instrumento para traçar os arcos que definem as condições das alturas.

Um outro exemplo que reforça essa interação entre visualização e instrumental é o resultado apresentado pelo sujeito para definir a posição de um ponto pertencente a uma reta e eqüidistante de outros dois que foram dados.

Neste problema o sujeito encontrou o ponto procurado abrindo o compasso até atender as condições expressas no enunciado (Fig. 06). A estratégia desse sujeito se caracterizou por um processo de ajustagem que estava sendo subsidiada pela visualização da solução. É certo que o sujeito considerou a condição de atender a solução, pois mostra os arcos que definem os lugares geométricos eqüidistantes dos pontos interceptando-se sobre a reta, no entanto, suprime da estratégia o traçado que definiria a posição do ponto procurado.

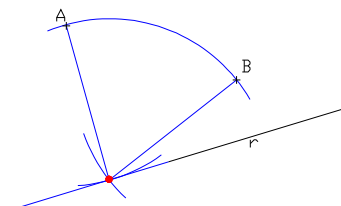


Fig. 06: A visualização com a ajuda do compasso é que subsidiou a determinação do ponto.

Identificamos ainda que a visualização por se apoiar substancialmente por meio de uma imagem assume uma característica concreta que influencia no entendimento sobre os objetos geométricos e no acionamento dos esquemas nas formulações das estratégias de resolução de um problema.

Observamos isso ao constatar que a influência no entendimento sobre os objetos geométricos é percebida no condicionamento que se constrói em torno do desenho fornecido em um enunciado. Essa conjectura se baseia em ações que partem do pressuposto que as figuras geométricas são associadas à imagem fornecida pelo desenho, e não às suas propriedades.

Por exemplo, identificamos que alguns sujeitos assumem a representação da reta como estando limitada a região da extensão do desenho que a representa. Como na situação ilustrada na Fig. 07, em que um sujeito solução não apresentou solução para determinação de um ponto pertencente a reta (r) e eqüidistante dos pontos (A) e (B) por entender que não seria possível encontrar tal ponto, uma vez que a mediatriz não interceptava a reta representada no desenho.

Uma outra situação que ilustra essa influência da concretude do objeto geométrico é o fato das estratégias ficarem condicionadas à relação dos elementos com a resposta. Isto é, os esquemas ao serem acionados são vinculados à relevância assumida a certos elementos por se centrar a atenção sobre um dado aspecto do problema. Toda a estratégia fica condicionada a contemplar elementos que assumem um papel de destaque na solução. Por exemplo, um dos problemas solicitava que se traçassem secantes a uma circunferência a partir de um ponto externo, de modo que essas secantes definissem cordas na circunferência com uma medida estabelecida (Fig. 08).

Uma das causas que foi identificada como causadora dos erros é que todas as estratégias partiam do ponto por onde as secantes deveriam passar. Com isso, deixavam de verificar as condições pertinentes a se ter cordas com uma medida estabelecida em uma circunferência. Nos traçados apresentados pelos diferentes sujeitos é latente a busca de um encaminhamento enfocando o ponto de onde saíam as secantes.

Essa ênfase em torno de um dos dados é resultante do modelo que se projeta na mente sobre o desenho final a ser obtido na solução do problema. É como se as estratégias tivessem de ser regidas no sentido de se ajustar 'aquele desenho' que foi visualizado. Pode também ser resultante da imagem gravada na mente dos procedimentos adotados para traçado de tangentes à circunferência por um ponto externo a esta.

De modo geral, ao serem analisadas as estratégias adotadas para resolução da série de atividades propostas, observamos que nas diferentes situações, evocando propriedades triviais

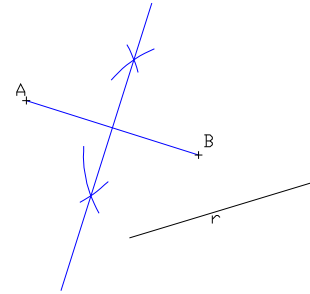


Fig. 07: A solução não foi apresentada porque a mediatriz não interceptava o desenho da reta.

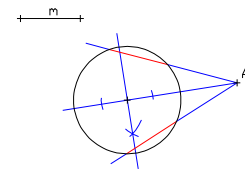


Fig. 08: Um dos resultados apresentados, mostrando que a estratégia é centrada no ponto por onde partem as secantes.

ou não, as estratégias empregadas apresentavam indícios de que tinham sido influenciadas pela percepção construída sobre o objeto geométrico a ser construído.

No entanto, alguns desses modelos não são resultantes exclusivamente de uma percepção respaldada numa visualização do objeto geométrico, pois houve situações em que as ações apresentavam indícios que os esquemas acionados baseavam-se em pré-conceitos. Nessas situações as estratégias se caracterizavam por reproduzir modelos pré-concebidos ou privilegiar alguns dados ou elementos em detrimento de outros.

O fato é que nos erros identificados constata-se uma ruptura entre os significados e significantes dos conceitos envolvidos na resolução dos problemas investigados. Os erros apresentados pelos sujeitos apresentam evidência de que não são resultantes dos limites de um campo conceitual. O que ocorre é que as representações dos objetos geométricos, por meio de um modelo mental ou por um desenho, conflitam com os invariantes desses objetos. Sendo que a visualização do objeto é privilegiada em detrimento das propriedades.

4 Considerações Finais

Considerando que a visualização assume um papel de destaque no acionamento dos esquemas e conseqüentemente no desenvolvimento das estratégias na resolução dos problemas e no próprio desenvolvimento cognitivo, como afirmam os teóricos Duval (1995, 2003), Fischbein (1993) e Van Hiele (1986), é mister que se contemple nas metodologias de ensino da geometria gráfica situações que abordem questões dessa natureza.

Um encaminhamento nesse sentido pode ser com uso de recursos que valorizem e ressaltem os invariantes pertinentes aos conceitos, o que poderia facilitar na integração entre significados e significantes. O uso de material concreto poderia ser uma outra possibilidade, mas desde que se fizessem os paralelos entre concreto e abstrato, para não correr o risco de privilegiar ou enfatizar apenas determinados aspectos ou situações.

Um outro recurso seria o uso de programas computacionais para construções geométricas, principalmente aqueles implementados com a geometria dinâmica por propiciar uma melhor identificação dos invariantes pela transformação dos elementos e figura geométrica em tempo real.

Seja qual for o recurso empregado é preciso que também sejam consideradas as implicações advindas de metodologias e contratos didáticos. As implicações provenientes dos contratos didáticos são no sentido de serem devidamente formulados ou estabelecidos. Isso porque, como foi observado em alguns erros apresentados nessa investigação, haviam ações dos sujeitos que mostravam um certo condicionamento para contemplar ou privilegiar os problemas sob determinada ótica, oriundos, possivelmente, de hábitos adquiridos na formação.

Contemporizar os recursos empregados com metodologias de ensino torna-se, possivelmente, o cerne da questão. Isto porque, cada recurso evoca ou desenvolve habilidades diferentes. Talvez a solução seja fazer uma miscelânea de recursos, pois o aluno terá a oportunidade de ver o objeto em diferentes situações, que segundo Vergnaud (1996) é fundamental para a formação do conceito.

Referências

- [1] ALMEIDA, Iolanda A. C. – **Identificando rupturas entre significados e significantes de conceitos geométricos: Um estudo em traçados de lugares geométricos bidimensionais, envolvendo pontos, retas e circunferências**. Tese (Doutorado em Educação) – Centro de Educação, Universidade Federal de Pernambuco, Recife 2007.
- [2] CARVALHO, Benjamin de A. – **Desenho Geométrico**. Rio de Janeiro: Ao Livro Técnico, 1986.
- [3] DUVAL, Raymond – **Sémiosis et pensée humaine**. Berne: Peter Lang, 1995.
- [4] _____ – Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: ALCÂNTARA, Sílvia Dias (org.) – **Aprendizagem em Matemática: registros de representação semiótica**. Campinas, Papyrus Editora, pp. 11-33, 2003.
- [5] FISCHBEIN, E. – The theory of figural concepts'. In: **Educational Studies in Mathematics**, 24/2, 139-162, 1993.
- [6] GIONGO, Afonso R. – **Curso de Desenho Geométrico**. São Paulo: Nobel, 1975.
- [7] LORIGGIO, Plácido – **Desenho Geométrico**. São Paulo: Nobel, sd..
- [8] PETERSEN, Julius – **Construções Geométricas**. São Paulo: Nobel, 1963.
- [9] VAN HIELE, P. M. – **Structure and Insight: A theory of mathematics_education**. Orlando, Fl: Academic Pres, 1986.
- [10] VERGANUD, Gerard – A Teoria dos Campos Conceptuais. In: BRUN, Jean (org.) – **Didáctica das Matemáticas**. Lisboa :Instituto Piaget, 1996.