GRAPHICA
CURITIBA, PARANÁ - BRASIL 2007

A RAZÃO ÁUREA NOS LADRILHOS DE ROGER PENROSE: A SUA DESMISTIFICAÇÃO

Poliana Marques de Almeida Alves Cavalcanti
Franck René Gilbert Bellemain
Robson da Silva Souza
UFPE – Univ. Federal de Pernambuco, Departamento de Expressão Gráfica
poliana_maac@hotmail.com, f.bellemain@gmail.com, robsons6@hotmail.com

RESUMO

O presente trabalho aborda o estudo de algumas propriedades da razão áurea e das contribuições, da mesma, na construção dos ladrilhos de Roger Penrose. O estudo de razão áurea começou com a geometria, mas não apresenta apenas propriedades geométricas, como também propriedades aritméticas e algébricas. A presença da razão áurea é comum em algumas figuras planas, como no pentágono regular e nos triângulos áureos. O matemático Roger Penrose utilizou essas figuras planas para fazer ladrilhos assimétricos, pois as mesmas possuem ângulos que facilitam o encaixe entre os ladrilhos.

Palavras-chave: razão áurea, ladrilhos, pavimentação do plano

ABSTRACT

This paper studies some of the various properties of the golden number and its contribuitions in the construction of the Roger Penrose plane tiling. The golden number starts with geometry but its doesn't have only geometric properties and also aritmetic and algebraic ones. The golden number can be found in some geometric figures such as the regular pentagon and in the golden triangles. The mathematician Penrose used this figures to tile the plane in a semi-regular way, since the figures have angles which facilitate the combinations,

Palavras-chave: razão áurea, ladrilhos, pavimentação do plano

1. Introdução

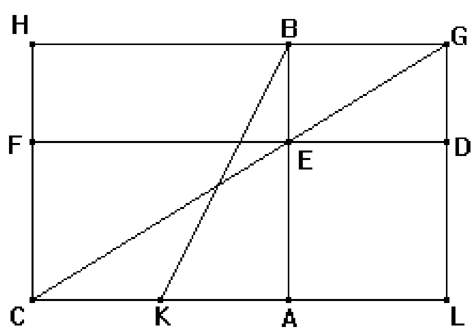
Porque se interessa à razão áurea? A milhares de anos, estão sendo produzidos materiais sobre esse número e já a tempo chegamos a um ponto que não parece se ter muito mais a produzir a respeito. Nossa abordagem não procura apresentar novas propriedades da razão áurea, mas, sobretudo resgatar algumas das propriedades desse número numa orientação didática, aproveitando as diversas propriedades geométricas, aritméticas, algébricas da razão áurea para estudar certas construções geométricas, assim como utilizar a geometria para abordar outros domínios da matemática como a álgebra.

Nesse texto, não apresentaremos todas as possibilidades de estudo oferecidas pelo tema da razão áurea e nos concentraremos sobre suas contribuições na construção dos ladrilhos de Roger Penrose.

2. Desenvolvimento

2.1 Razão Áurea

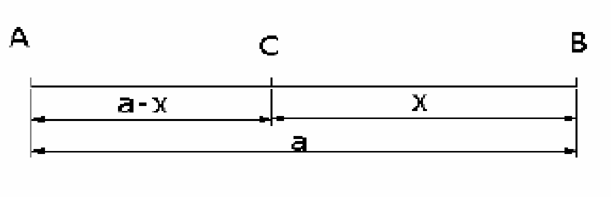
A historia da razão áurea (anotado em geral pela letra grega phi: φ) começa com a geometria. Ela é razão permitindo a divisão de um segmento em extrema e média razão, problema tratado por Euclides no ano 300 a.C., na publicação dos “Elementos”, uma coleção de treze volumes que sedimentam as bases da chamada Geometria Euclidiana. Na proposição 30, do livro 6, Euclides ensina como “dividir um segmento nas razões média e extrema”. Para dividir um segmento na razão média e extrema, a razão existente entre o comprimento do segmento inteiro e o de sua maior divisão (razão extrema) é exatamente igual á razão entre o comprimento desta maior divisão e o da menor (razão média). Euclides não tinha a sua disposição nossas notações permitindo a modelização algébrica de um problema geométrico e resolveu a questão utilizando outras proposições sobre a equivalência entre área de superfícies de formas diferentes (figura 1).



ABHC é um quadrado, K é ponto médio de AC. KL=KB. A diagonal CG do retângulo CLGH encontra AB no ponto E dividindo AB na extrema e media razão.
(Vitrac e Caveing, 1990)

Figura 1: Divisão de um segmento AB em extrema e media razão segundo Euclides. O ponto E representa a divisão do segmento AB em extrema e media razão.

Como mostra a figura 2, formulado com nossas notações algébricas atuais, o problema consiste simplesmente na resolução de uma equação do segundo grau: $x^2+ax-a^2=0$ onde podemos decidir que $a=1$, dando a equação simplificada: $x^2+x-1=0$.



$$(a-x) / x = x / a$$

Figura 2: Segmento divido na razão áurea

De um ponto de vista didático, é interessante destacar que como o número procurado é uma razão entre comprimentos, ele é independente da unidade escolhida (a=1 não é uma simplificação problemática na situação). É também interessante observar que a questão da unidade chegou com a modelização algébricas e os números não precisam ser evocados na resolução geométrica.

As propriedades algébricas da razão áurea que aparecem na equação foram exploradas, entre outros, por Fibonacci na construção das suas seqüências, observando particularmente que calcular o quadrado da razão áurea é a mesma coisa que lhe acrescentar 1 e calcular seu inverso é a mesma coisa que lhe subtrair 1.

As diversas propriedades geométricas, aritméticas e algébricas da razão áurea foram exploradas de diversas formas, das mais místicas às mais cartesianas, pelos matemáticos, geômetra e artistas. Assim, durante toda a história, privilegiadas mentes discutiu e estudou sobre a razão áurea. Entre elas estão Johannes Kepler, o astrônomo que concebeu as leis do movimento planetário, Pitágoras, o mago dos números, Euclides, o pai da geometria euclidiana, Leonardo da Vinci, o gênio da ciência e das artes, Leonardo de Pisa, também conhecido como Fibonacci, que concebeu a seqüência de Fibonacci, Luca Pacioli, que dedicou todo um tratado a este tema, e com certeza matemáticos, geômetras, astrônomos e cientistas que não se destacaram mas que acreditaram entras coisas na existência de uma forma melhor de dividir um segmento de reta.

Encontra-se, ou mostra-se como mais o menos sucesso no rigor e na precisão, a proporção áurea nos lugares mais diversos. Na natureza, ela encontra-se tanto no reino animal como no reino vegetal. No reino animal, a proporção áurea apresenta-se na proporção do corpo humano, no crescimento das conchas dos moluscos, já no reino vegetal apresenta-se na distribuição das sementes do girassol, no desenvolvimento da planta de nome Euforbia. Na arquitetura, ela aparece nas pirâmides de Gizé, no Egito, entre a altura da face triangular e a metade do lado da base, já na Grécia, no Templo Partenon e na arquitetura moderna tornou-se comum à utilização de retângulos áureos. Na arte, os pintores utilizavam-na para suas composições ficarem equilibradas e harmoniosas, entre eles encontra-se Leonardo da Vinci. Na geometria, ela apresenta-se em retângulos, triângulos, pentágonos regulares, decágonos regulares, espiral logarítmica entre outros.

2.2 Razão Áurea em figuras planas

O ponto no qual vamos nos interessar explora uma propriedade geométrica da razão áurea utilizada na construção do pentágono regular (Figura 3).

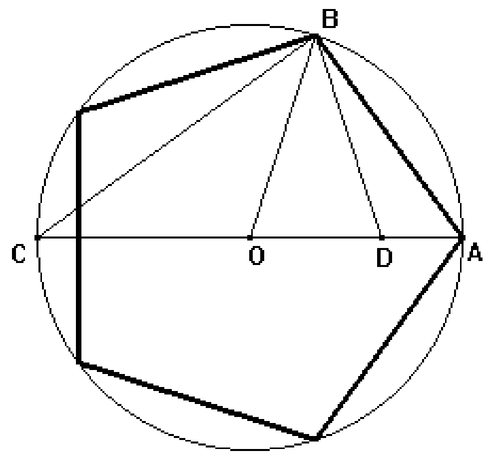


Figura 3: A razão áurea no pentágono regular

Considerando A e B dois vértices consecutivos do pentágono regular, O o centro da circunferência circunscrita ao pentágono e AC um diâmetro dessa circunferência. É fácil mostrar que os triângulos CBD e BDO são isósceles e semelhantes, e deduzir que O divide do segmento CD em extrema e media razão. Os triângulos OBC e BDO são triângulos áureos (os lados são na proporção áurea) e foram explorados por Penrose para pavimentar o plano de forma semi-regular com ladrilhos.

Nos ladrilhos de Penrose a presença da proporção áurea se dar através dos triângulos áureos. Um triângulo isósceles cujo ângulo oposto a base mede 36° e os ângulos da base medem 72° (o dobro do ângulo oposto na base) possui uma razão áurea. O mesmo ocorre com um triângulo isósceles cujo ângulo oposto à base mede 108° e os da base medem 36°. Ambos chamam-se triângulos áureos.

Para analisar a proporção áurea no triângulo áureo acutângulo, traça-se uma bissetriz de um dos ângulos da base para obter dois triângulos semelhantes, o triângulo ABC e o outro ACD, conforme mostra a figura 4. Ainda nela, utilizando semelhança de triângulo, observa-se que o segmento BC, lado de triângulo áureo acutângulo, encontra-se dividido na proporção áurea. Ele tem seus lados na razão áurea com a base.

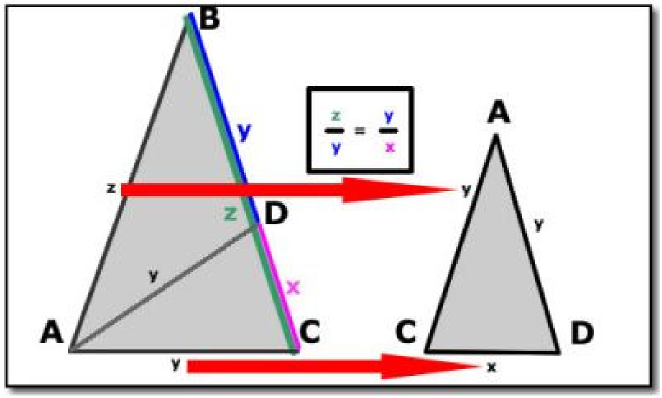


Figura 4: Razão áurea

Para analisar a proporção áurea no triângulo áureo obtusângulo, traça-se um segmento paralelo ao segmento AC por D e obtêm-se dois triângulos obtusângulos semelhantes, um triângulo ABD e o outro ADC. E utilizando semelhança de triângulo percebe-se que o segmento AB, base do triângulo áureo obtusângulo, encontra-se dividido na razão áurea. Ele tem sua base na razão áurea com os seus lados.

2.3 Roger Penrose

Roger Penrose é um importante físico matemático que nasceu em 8 de Agosto de 1931, na cidade de Colchester, Inglaterra. Seu irmão mais velho ensinava matemática e seus pais, embora tivesse formação em medicina, apreciavam a geometria. Ambos influenciaram e desenvolveram em Penrose o interesse pela matemática. Entre 1939 e 1945, a família Penrose viveu no Canadá e já neste período Roger Penrose mostrava seu interesse pela matemática.

Ao retornar para Inglaterra, após a Segunda Guerra Mundial, Roger fez graduação em matemática no *University College School* em Londres. Em 1957, doutorou-se em Geometria Algébrica em Cambridge. Nesta época, ele já começou a investigar a existência ou não de ladrilhos que pavimentassem o plano, mas sem serem periódicos, ou seja, sem gerar um padrão repetido. Nos anos seguintes, passou por Universidades Inglesas e Norte Americanas e recebeu diversos prêmios pelas suas contribuições na área da Matemática e da Física. Apesar da maior parte de seu trabalho esteja relacionada com a Teoria da Relatividade e a Física Quântica, Penrose admira a Matemática Recreativa.

2.4 Os Ladrilhos de Penrose

Para solucionar o problema da existência ou não de ladrilhos não periódicos, ladrilhos que pavimentassem o plano sem gerar um padrão repetido, necessitava de um bom conhecimento de geometria euclidiana, papel e lápis, pois o mesmo não permite solução computacional. Após anos de estudos, em 1974, Penrose reduziu o número de polígonos para resolver o problema, que tinha milhares, para seis. Posteriormente, ele encontrou mais um conjunto de dois polígonos que resolvem o problema combinando apenas eles. E depois encontrou mais outro conjunto de dois que solucionam o problema da mesma forma que o segundo grupo.

Denominaram esses polígonos de ladrilhos de Penrose e os conjuntos de protoladrilhos de Penrose. As figuras de 5 a 7 mostram os conjuntos de ladrilhos.

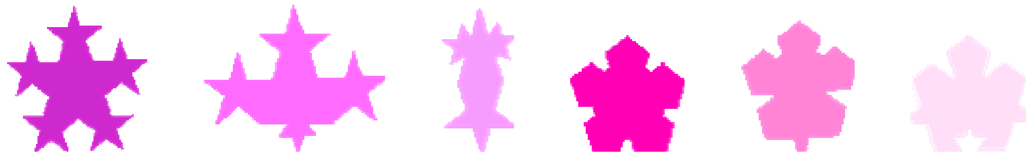
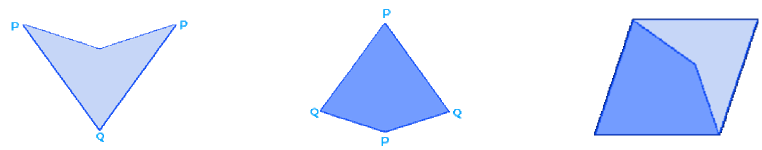


Figura 5: Primeiro Conjunto de Protoladrilhos.



dart ou seta *kite* ou papagaio

Figura 6: Segundo Conjunto de Protoladrilhos

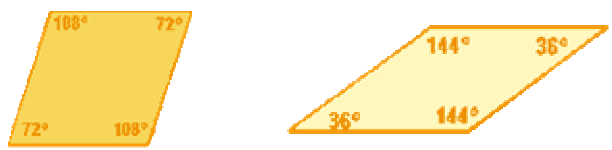


Figura 7: Terceiro Conjunto de Protoladrilhos

Os polígonos do primeiro conjunto não receberam nenhuma nomenclatura específica assim como os do terceiro conjunto. Já os polígonos do segundo conjunto, que se originam de um losango de ângulos interno de 36° e 72°, foram nomeados de *dart* ou seta o quadrilátero côncavo e de *kite* ou papagaio o quadrilátero convexo por John Conway. Existe uma grande variedade de desenho que se pode formar com os ladrilhos de Penrose. A figura 8 exemplifica algumas pavimentações utilizando os conjuntos de ladrilhos de Penrose.

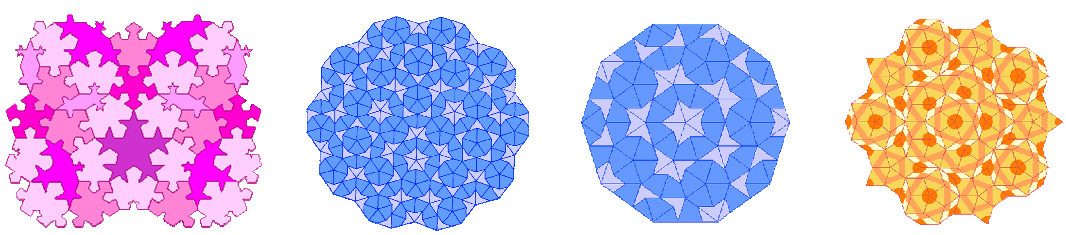


Figura 8: Pavimentação utilizando os ladrilhos de Penrose.

Os direitos intelectuais sobre estes ladrilhos pertencem a Roger Penrose, mas se contesta que ele tenha sido o primeiro a estudar os mesmos. Sabe-se que ele não foi o primeiro a utilizá-los. Existem exemplos disso, os arabescos, no Uzbequistão, de mais de quinhentos anos atrás (artigo publicado pelo físico Peter Lu, da Universidade de Cambridge, EUA, na revista Science), um dos arcos do alojamento do Sultão da Mesquita Verde da cidade de

Bursa, na Turquia, datado de 1424 e arcada do templo de Darbi Imam em Isfahan, Irã, construído em 1453, seguiam rigorosamente os padrões dos ladrilhos de Penrose.

2.5 A presença da Razão Áurea nos ladrilhos de Penrose

Para revestir uma superfície plana utilizando apenas um tipo de ladrilho com formato de polígono regular sem deixar lacunas ou hiatos, o mesmo deve possuir ângulos internos divisores exatos de 360°. Quando o ângulo do polígono regular for divisor exato de 360°, ao juntar uma determinada quantidade do mesmo polígono forma-se o ângulo de 360° e não existirá lacuna entre eles, como mostra as três primeiras imagens da figura 5. No caso dos polígonos que não possuem ângulos internos divisores exatos de 360°, eles apresentaram lacunas como mostra a quarta imagem na figura 9.

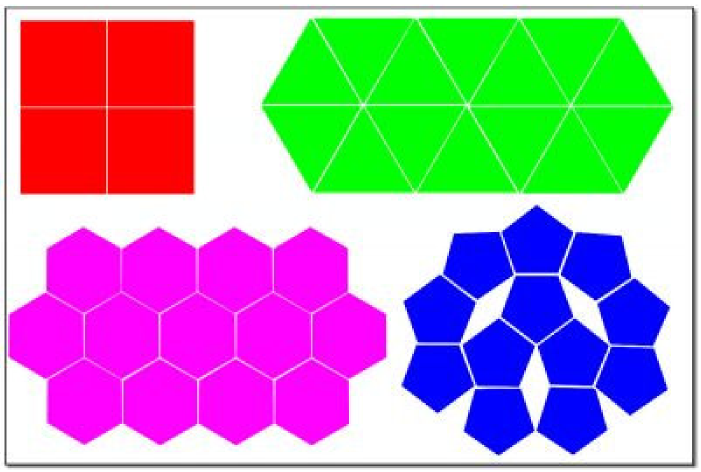


Figura 9: Ladrilhos com formato de polígonos regulares.

Ao analisar os hiatos formados pelo revestimento com pentágonos regulares, observa-se que se pode preenchê-los com dois triângulos acutângulos e isósceles unidos na base. Se os ângulos internos de um pentágono regular são de 108° e ao unir três pentágonos, para forma um ângulo de 360° necessita-se de um ângulo de 36°, então o ângulo oposto à base do triângulo terá 36º e como o mesmo é isósceles os ângulos da base terão 72º. Os triângulos que preencheram os hiatos deste revestimento serão dois triângulos acutângulos áureos.

Porém a razão áurea não se apresenta, neste revestimento, apenas com os triângulos áureos que preenchem as lacunas. Quando se traça as diagonais de cada pentágono, o revestimento dividi-se em figuras elementares. Nos triângulos áureos acutângulos, já citados, e cada pentágono em cinco triângulos áureos obtusângulos e em um pentagrama, como se pode observar na figura 10.

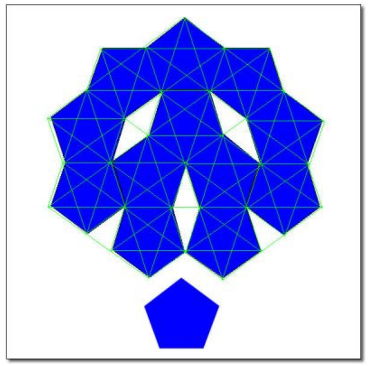


Figura 10: Figuras elementares

Existem diversas possibilidades de dividir este revestimento em figuras elementares, mas uma das que desperta um interesse das pessoas é a que utiliza os ladrilhos com forma de triângulos áureos e com forma de combinações dos mesmos, mostrada na figura 11. Nela observam-se os triângulos áureos acutângulos, os triângulos áureos obtusângulos e dois tipos de losangos, um formado por dois triângulos áureos acutângulos unidos pelas bases, de cor verde, e o outro formado por dois triângulos áureos obtusângulos também unidos pelas bases, de cor magenta.

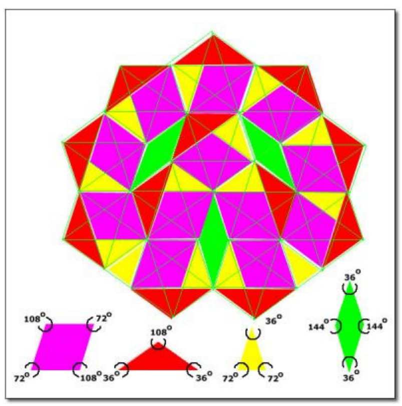


Figura 11: Decomposição dos pentágonos em polígonos elementares

Analisando a figura 11, nota-se que ela não possui qualquer tipo de simetria, algumas partes são simétricas, porém não toda a figura. Podem-se acrescentar polígonos elementares idênticos aos utilizados e o revestimento continuará a não ter lacunas ou hiatos. Nota-se que não apenas com certos polígonos regulares pode-se revestir uma superfície plana sem deixar hiatos ou lacunas, mas também com figuras elementares. A única propriedade especial que têm em comum é que todos eles são triângulos áureos ou combinações de triângulos áureos, ou seja, quase todas as suas linhas estão na razão áurea.

O mesmo ocorre com os ladrilhos de Roger Penrose. Ao analisá-los, observa-se que todos eles possuem como formação a combinação de triângulos áureos. Desta forma, todos ladrilhos possuem segmentos áureos. Qual a proposta de utilizar a razão áurea nestes ladrilhos? Será para obter um revestimento harmônico que agrade os olhos humanos? Durante toda a história, a humanidade deu um aspecto místico à razão áurea, desprezando as suas propriedades. A combinação de triângulos áureos forma peças de fácil encaixe por causa dos seus ângulos. Como já foi dito, os ângulos do triângulo áureo acutângulo são 36°, o oposto à base, e 72°, os da base e os do triângulo obtusângulo são 108°, o oposto à base, e 36°, os da base. A combinação dos mesmos forma ângulos de 72°, 108°, 180° e 360°, facilitando o preenchimento do espaço sem forma lacunas ou hiatos.

3. Considerações finais

A razão áurea tem uma importância maior no que diz respeito as suas propriedades geométricas, aritméticas e algébricas do que com sua presença na natureza, nas construções arquitetônicas, na proporção do corpo humano. Acreditamos que a presença da razão áurea nestes locais não seja algo místico e sim por causa da importância das suas propriedades. Nos ladrilhos de Penrose, observa-se a presença da razão áurea pela facilidade do encaixe dos mesmos.

Referências

[1] VITAC e CAVEING, Euclide, les elements, tradução do texto de Heiberg, PUF, Paris, 1990.

[2] PIROPO B. Um número muito especial VI: ladrilhos de Penrose. Março de 2007. Disponível em: http://www.forumpcs.com.br/index.php?c=11. Acesso em: 21 de Junho de 2007.

[3] UMBELINO, Antônio Luís. Roger Penrose. Junho de 2004. Disponível em: http://www.esidm.pt/disciplina/matemática/abaco40.htm#rogerpenrose. Acessado em: 10 de Julho de 2007.