



APRENDIZAGEM DA SIMETRIA ATRAVÉS DE UMA SEQÜÊNCIA DIDÁTICA

Gilson Braviano

UFSC - Universidade Federal de Santa Catarina, Depto de Expressão Gráfica
gilson@cce.ufsc.br

RESUMO

Apresenta-se, neste artigo, uma seqüência didática para a exploração das definições e propriedades de simetria. Os problemas foram implementados em um software de Geometria Dinâmica e permitem que o aluno investigue as possíveis soluções relativas a uma situação real através da manipulação de figuras.

Palavras-chave: simetria, geometria dinâmica, interatividade.

ABSTRACT

It is presented, in this article, a didactic sequence for the exploration of the definitions and properties of symmetry. The problems had been implemented in a software of Dynamic Geometry and allow that the students investigate possible solutions to a real situation through the manipulation of figures.

Key-words: symmetry, dynamic geometry, interativity.

1 Introdução

Há alguns anos, surgiu uma ferramenta muito importante na área gráfica: a Geometria Dinâmica. Implementada por *softwares* como o The Geometer's Sketchpad, o Tabulae, o Cinderella e o Cabri-Géomètre, entre outros, esta ferramenta permite explorar interativamente os conceitos da geometria clássica através do uso do movimento nas figuras construídas.

Esta natureza interativa, quando bem utilizada pedagogicamente, permite levar os estudantes a proporem suas próprias conjecturas e testarem-nas eficientemente, adquirindo uma melhor percepção e compreensão visual daquilo que estão investigando.

Deste modo, têm-se nas potencialidades propiciadas pelo uso pedagógico adequado da Geometria Dinâmica, elementos aliados para contrapor os resultados do negligenciamento que vem sofrendo o ensino da geometria nas últimas décadas no Brasil.

Nesta linha, este trabalho apresenta uma metodologia baseada na investigação de

problemas reais envolvendo as transformações por simetria, visando atrair a atenção dos alunos e motivá-los a questionar, analisar e tirar conclusões através de um processo interativo, implementado em um software de Geometria Dinâmica.

2 Geometria Dinâmica e Educação Gráfica

Nos últimos anos têm sido evidenciadas discussões relativas ao fato do ensino da geometria ter sido negligenciado no Brasil por décadas, levando à divulgação errônea de que ela é uma parte abstrata da matemática, de difícil percepção para os alunos. Além disso, como nos livros didáticos os conteúdos de geometria são apresentados quase sempre nos capítulos finais e o professor dificilmente consegue chegar até o final do livro, ocorre um abandono do estudo da geometria no Ensino Médio e Fundamental. O aprofundamento dessas questões pode ser encontrado em uma vasta bibliografia, das quais cita-se Campos (2001) e Souza Filho (1998).

Existem, entretanto, caminhos apontados por diversos autores no sentido de contribuir para a transformação dessa realidade negativa relativa à educação gráfica e algumas direções indicadas fazem referência ao uso dos recursos computacionais. Braviano & Rodrigues (2002) afirmam que a escola não pode funcionar mais como um meio inibidor do desenvolvimento das noções espaciais do estudante e ressaltam que com o advento do computador e sua inserção, ainda que por etapas, em escolas, pode-se oferecer aos alunos a possibilidade de aprimorar seus conhecimentos usando ambientes computacionais que executem a Geometria Dinâmica. Abre-se, assim, uma nova possibilidade de realizar o estudo da geometria, usando tal artefato tecnológico, mas precisa-se ter cuidado ao usá-la. Uma boa maneira para trabalhar com o aluno é explorar as possibilidades de interatividade que alguns softwares oferecem.

Dentro desta linha de raciocínio, usando tais softwares pode-se retomar o ensino da geometria nas escolas, possibilitando rever todo um conjunto de conceitos e propriedades geométricas necessárias ao desenvolvimento das representações mentais dos alunos. Além disso, a introdução do computador nas aulas vem de encontro às possibilidades pedagógicas que as novas tecnologias oferecem.

Com o advento da Geometria Dinâmica, pode-se explorar a geometria clássica através de programas interativos para o tratamento de construções geométricas, através do uso do movimento nas figuras construídas. Esta natureza interativa leva os estudantes a proporem suas próprias conjecturas e testarem-nas eficientemente, adquirindo uma melhor percepção e compreensão visual daquilo que estão investigando.

Na Geometria Dinâmica, o aprendizado não se baseia num processo de cópia, onde as definições de teoremas, os resultados de problemas e provas acabam sendo assimilados pelo método comportamentalista tradicional. Pelo contrário, justifica-se o uso de uma abordagem construtivista pela natureza da informação que é assimilada através da exploração e da descoberta.

Neste sentido, pode-se citar o desenvolvimento de uma seqüência didática para o estudo de aplicações geométricas fundamentadas em transformações pontuais, denominada

Transpontuais, que tem como objetivo estimular tanto o pensamento lógico quanto o pensamento criativo, na busca da solução de problemas que servem de diferentes métodos geométricos de representação (RODRIGUES & RODRIGUES, 2000). Outro ambiente interativo implementado em um software de geometria dinâmica foi desenvolvido pela professora Maria Helena Wyllie Lacerda Rodrigues para o estudo de sombras em perspectiva e uma análise de sua aplicação demonstra a potencialidade deste tipo de elemento pedagógico (RODRIGUES & BRAVIANO, 2007).

Ainda dentro desta linha, apresenta-se, na próxima seção, uma seqüência didática para a exploração das definições e propriedades de simetria através da Geometria Dinâmica, onde os problemas são construídos de maneira a permitir que o aluno trabalhe em uma situação real com um fundo matemático.

3 Seqüência Didática para a Aprendizagem de Simetria

Visando desenvolver uma seqüência didática para a exploração das definições e propriedades de simetria através da Geometria Dinâmica, decidiu-se construir problemas de maneira a permitir que o aluno realize suas reflexões baseadas em situações reais.

Em cada problema, visando à investigação das possíveis soluções, são apresentadas figuras de estudo, cujo objetivo é auxiliar o aluno a compreender a situação proposta. São dadas diretrizes para que as figuras sejam manipuladas até se descobrir, usando as propriedades interativas do software de Geometria Dinâmica, a solução de cada problema (ABREU, 2002).

Assim, enquanto o aluno busca soluções, tenta entender o que esta acontecendo geometricamente e trabalha com as propriedades da simetria. Ao final, uma pergunta, com intenção de generalização, é deixada em aberto.

3.1 Problema 1: Onde pegar a água?

Redigido de forma “matemática”, este problema seria: São dados uma reta r e dois pontos A e B situados de um mesmo lado de r . Determine um ponto X , em r , para que se tenha $AX + XB$ mínimo.

Usando um enunciado mais atrativo, chegou-se à redação mostrada no primeiro retângulo da figura 1. Esta figura apresenta diretamente a visualização deste problema em uma tela do software Cabri-Géomètre II, onde, além do enunciado, o aluno pode visualizar as posições relativas à pessoa, o animal e o rio.

Considerando que a água deva ser pega no ponto U do rio, pede-se que ele movimente este ponto (realizando, neste primeiro momento interativo, uma exploração inicial) e encontre o local onde a pessoa deve pegar a água de modo que seja percorrido o menor caminho possível. Para facilitar a visualização da solução, construíram-se os vetores AU e UB e mostrou-se a distância de A até B , passando pelo ponto U . Assim, o usuário poderá observar os trajetos possíveis e selecionar o menor deles, conforme ilustra a figura 2.

Pede-se, em seguida, que o aluno mova A ou B, para perceber que a solução obtida anteriormente não satisfaz mais ao problema e que o ponto U deve ser alterado. Assim, a posição de U depende das posições de A e B (ver figura 3).

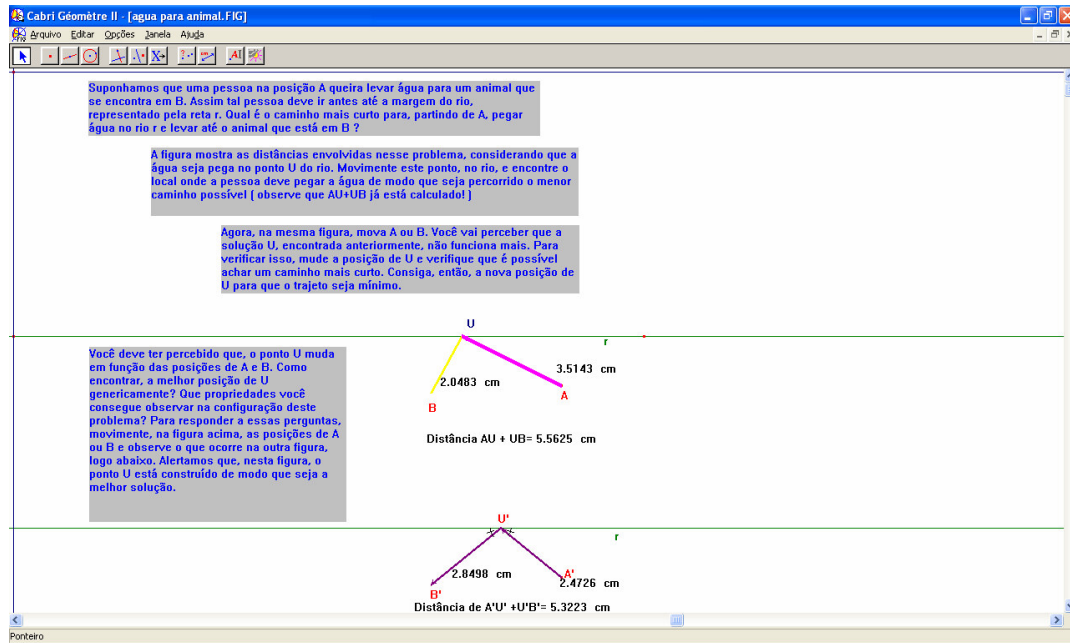


Figura 1: Tela inicial do problema “Onde pegar a água?”.

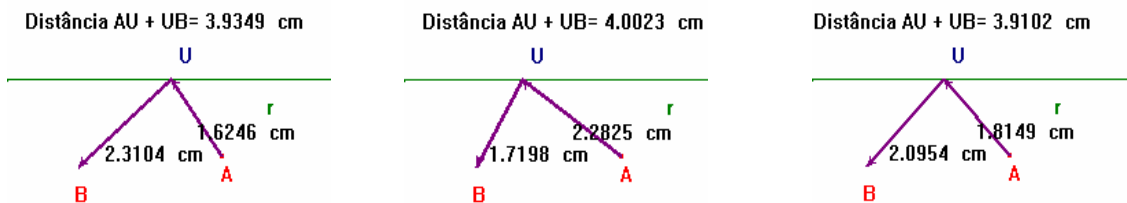


Figura 2: Três ensaios, com A e B na mesma posição e o ponto U sendo movimentado.

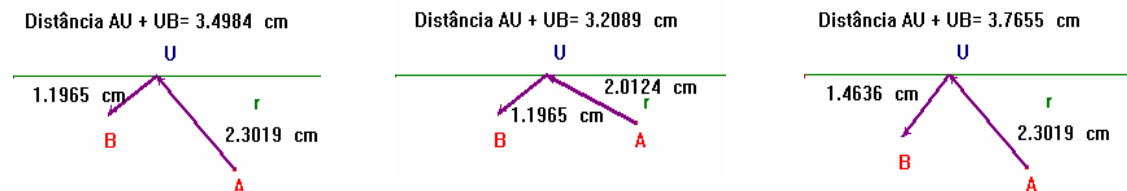


Figura 3: Mostra o ponto U fixo e A e B sendo movimentados.

Para que o aluno consiga achar a melhor posição de U, genericamente, e observar quais as propriedades utilizadas na solução deste problema, criou-se uma nova figura, onde o ponto U foi construído de modo que seja a melhor solução. Esclarece-se, aqui, que o aluno não sabe, ainda, como foi feita esta construção. Este é, na verdade, um dos objetivos deste problema. Assim, movimentando A e/ou B, ele poderá visualizar a melhor posição para U, conforme mostra a figura 4 (ele encontrará o menor caminho observando o que acontece nesta figura, a qual somente poderá ser explorada através dos movimentos feitos na figura 3).

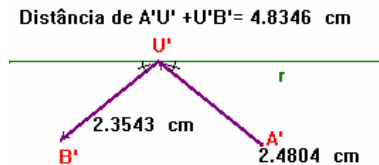


Figura 4: A melhor solução é apresentada para A e B quaisquer.

Sugerimos ao aluno que movimente o ponto B para o outro lado do rio e deixe o ponto A onde está, a fim que ele perceba que o menor caminho é a reta que vai de A até B e que o ponto U é a interseção do rio com o segmento AB, o mesmo ocorrerá se deixar o ponto B onde está e movimentar o ponto A até o outro lado do rio, conforme se vê na figura 5.

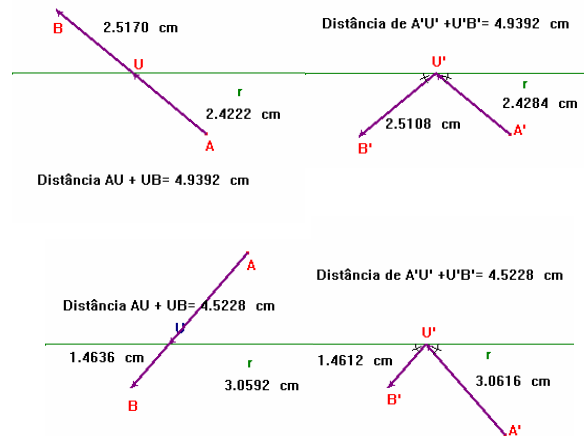


Figura 5: Visualização do ponto U como a interseção do rio com o segmento AB.

Para levar o aluno à identificação de existência da Simetria, pede-se para observar que: a distância de B à r é igual a distancia de B' à r. Assim ele poderá concluir que B e B' são simétricos em relação à reta r e que o mesmo ocorre com A e A'.

Construímos uma nova figura onde temos dois triângulos B'UB e A'UA. Pedimos ao aluno que trabalhe dinamicamente para que possa continuar sua exploração e descobrir mais algumas propriedades interessantes (ver figura 6).

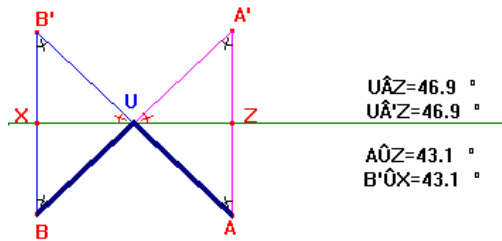


Figura 6: Exploração de alguns conceitos.

Movimentando o ponto A ou o ponto B o aluno pode verificar que os ângulos da base do triângulo AA'U ou do triângulo BB'U são iguais. Então, se os ângulos da base são congruentes, os triângulos são isósceles. Percebendo também que o segmento UA é igual ao segmento UA' pode-se concluir que r é a mediatriz do segmento AA', e o mesmo ocorre para o segmento BB'. Na figura 7 apresenta-se os textos que levam os alunos aos questionamentos descritos.

Trabalhe dinamicamente os triângulos B'UB e o A'AU, acima, e responda às seguintes perguntas:

1) Em relação aos lados, como você classificaria o triângulo B'UB: isósceles, equilátero ou escaleno?

Se você respondeu isósceles, acertou!

Caso contrário, observe o seguinte:
Pela propriedade de simetria temos que os triângulos XUB' e XUB são congruentes, assim $XB' = XB$ e $B'U = BU$, logo o triângulo B'UB é isósceles.

2) É correto dizer que a reta r é bissetriz de BÔB'? Seria ela, também, mediatriz de BB'?

Como já verificamos que o triângulo B'UB é isósceles, agora é fácil! Lembre que em triângulos isósceles a bissetriz e a mediatriz são coincidentes. Como r é um eixo de simetria do triângulo BUB', dividindo-o em XUB' e XUB semelhantes, r é bissetriz do ângulo BÔB' (e, portanto, mediatriz de BB').

Refleta, agora, se o mesmo é válido para AÔA'.

3) O ângulo AÔA' é congruente ao AÔZ?

Se você observar estes dois ângulos, perceberá que são consecutivos, mas não são adjacentes pois possuem pontos em comum logo não são congruentes.

4) Você percebe alguma relação entre os pares de ângulos BÔB' e AÔA', XÔB e ZÔA' e finalmente XUB' e ZÔA'?

Se você acha que eles são congruentes, qual seria a sua justificativa? Se você lembrou que ângulos opostos pelo vértice são congruentes, Parabéns!!

Você já sabe que r é a bissetriz do ângulo BÔB' então podemos afirmar que os segmentos AU e UB formam ângulos congruentes com a reta r. Podemos concluir que para obtermos o menor caminho, os ângulos formados da posição A até o rio e do rio até B serão congruentes.

Assim sendo, o ponto onde a água deve ser pega no rio será obtido usando simetria. Basta, obter o simétrico de A em relação à reta r (o rio) e ligar este simétrico ao ponto B. Na interseção deste novo segmento com o rio r, teremos o local exato onde a água deve ser pega.

Figura 7: Diálogos com os aprendizes.

Continuando a investigação, o aluno poderá verificar que a mediatriz da base é a bissetriz do ângulo $A\hat{U}A'$, isto é, a reta r , eixo de simetria, contém as bissetrizes de um par de ângulos opostos pelo vértice formados pelo segmento $A'B$ e o segmento AB' . Então se pode afirmar que $A\hat{U}A'$ e $B\hat{U}B'$, $A'\hat{U}Z$ e $B\hat{U}X$, $B'\hat{U}X$ e $A\hat{U}Z$ são ângulos opostos pelos vértices. E ainda poderá perceber que os segmentos AU e UB formam ângulos congruentes com a reta r . Sendo assim, o aluno poderá chegar a conclusão de que para obter o menor caminho, os ângulos formados da posição A até o rio e do rio até a posição B terão de ser congruentes.

3.2 Problema 2: Esconde-esconde em uma sala com espelhos

O objetivo deste problema é proporcionar o estudo das reflexões, de modo mais complexo que o problema anterior. Para isso foi proposta a seguinte ilustrada pela figura 8.

Dois garotos estão brincando em uma escola de dança. Eles entram em uma sala que possui uma parede totalmente coberta por espelhos (em cor lilás) e uma divisória separando o ambiente em duas salas menores, conforme mostra a figura 1, logo abaixo.

Um deles (o garoto B) vai até o outro lado da divisória e percebe que, dependendo do local em que ficar, seu amigo (o garoto A) não poderá lhe ver refletido no espelho (na parede lilás).

Eles resolvem, então, descobrir quais seriam os locais em que, estando cada um de um lado da divisória, o garoto A não consegue ver o outro refletido no espelho.

Você saberia dizer quando isso acontece?

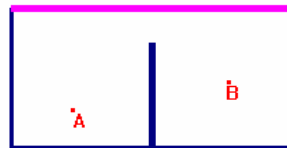


Figura 1

Figura 8: Figura criada para representar a situação proposta.

Para dar início às investigações, criou-se uma figura, com alguns números indicando posições diferentes onde o garoto B poderia ficar (figura 9). Percebe-se que está representado, também o ponto X, no espelho, onde A vê B refletido.

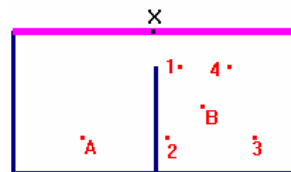


Figura2

Figura 9: Indica posições diferentes onde o garoto B poderia ficar.

Utilizando-se o mesmo procedimento do problema 1, pede-se ao aluno que movimente o ponto B (que representa o garoto B), até as posições 1, 2, 3 e 4 e observe as diferentes posições do ponto X sobre o espelho. Quando o aluno movimenta o garoto B até cada uma das

posições ele pode, intuitivamente, tentar determinar em quais posições o garoto A pode vê-lo refletido no espelho. Para explorar esta percepção com maior precisão geométrica, é apresentada uma terceira figura com os segmentos de reta ligando A até X e X até B. Assim, o aprendiz verificará, usando o dinamismo da geometria, que quando o garoto B está nas posições 1 ou 3 os segmentos não interceptam a parede e então o garoto B não pode permanecer naqueles locais, já que não quer ser visto pelo garoto A.

A próxima etapa, mais complexa, generaliza a resposta utilizando princípios de simetria, já que as posições 1, 2, 3 e 4 não são as únicas posições possíveis para o garoto B se esconder ou se mostrar para o garoto A através do seu reflexo no espelho.

A figura 10 mostra a forma que têm as regiões onde o garoto B poderá se esconder do garoto A e sugere-se uma atividade dinâmica relativa a esta cena. Como última interação, deixa-se uma pergunta no ar, que foi feita assim: “Será que estas regiões poderiam formar outros polígonos?” A resposta é sim. Tudo depende do local onde o garoto A ficar, já que ele esteve fixo durante toda a resolução do problema, porém, isso, cabe ao aluno investigar.

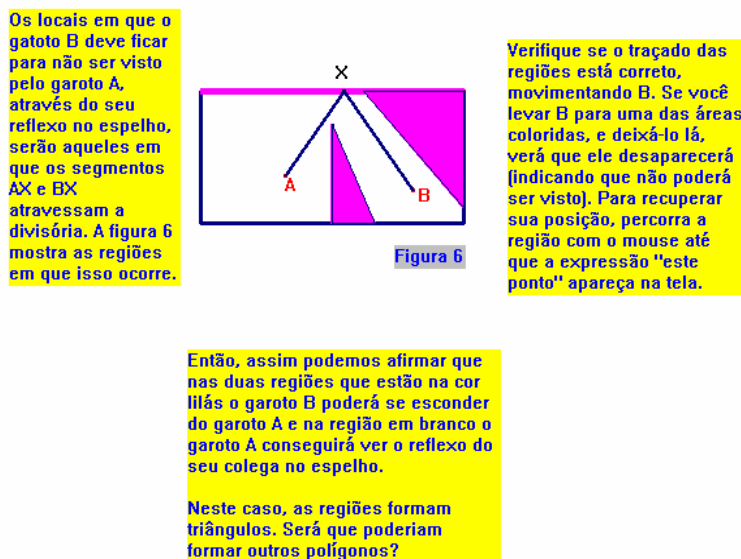


Figura 10: Visualização das regiões em que B poderá se esconder de A.

4 Considerações Finais

Apresentou-se, neste artigo, uma seqüência didática para a aprendizagem da simetria através de roteiros organizados para orientar o fluxo de pensamento do aprendiz, combinado a uma figura de análise manipulável. Este material foi desenvolvido com o software de Geometria Dinâmica Cabri-Géomètre II e a estratégia didática utilizada criou um ambiente interativo propício à busca de soluções associadas a problemas reais por parte dos alunos, evitando que estes esperassem por uma solução pronta.

Tais problemas foram formulados de modo a levar o aluno a raciocinar através da exploração das estruturas geométricas implícitas nas figuras. Assim, ao testar idéias e

conjecturas, o aprendiz movimentava as estruturas geométricas e interage com o conteúdo relativo à simetria. Para incentivar a construção do conhecimento, determinadas perguntas foram feitas para que o aluno interagisse com os conceitos e propriedades relativas ao assunto em estudo e pudesse sentir a necessidade de aplicá-los para caminhar na busca da solução.

Para utilizar a seqüência didática proposta neste artigo, os alunos não necessitam aprender a trabalhar com o Cabri-Géomètre II. Só lhes é exigido que movimentem pontos já construídos e analisem os resultados. Os problemas desenvolvidos necessitam de um estudo relativo às caixas de texto (posições, cores, fontes etc.) e a novas possibilidades interativas (questionamentos, propriedades importantes, elementos dinâmicos etc.). Evidentemente outros tópicos relativos às transformações de figuras podem ser desenvolvidos e integrados à seqüência didática.

De modo geral, este tipo de proposta dá visibilidade à importância da informática como apoio para a construção do conhecimento, sobretudo na área gráfica, que vem sofrendo com o descaso a ela destinado nas últimas décadas.

Referências

- [1] ABREU, I.C. **Proposta de abordagem do tema simetria usando o Cabri-Géomètre.** Trabalho de Conclusão de Curso, sob orientação do prof. Gilson Braviano. Universidade Federal de Santa Catarina: Florianópolis, 2002.
- [2] BRAVIANO, G. & RODRIGUES, M.H.W.L. **Geometria Dinâmica: Uma nova geometria?** In: Revista do Professor de Matemática, n. 49, p. 22-26, SBM, 2002.
- [3] CAMPOS, A.R.S.A. O desenho no novo ensino médio. In CD-Rom do 15º Simpósio Nacional de Geometria Descritiva e Desenho Técnico e IV International Conference on Graphics & Engineering for Arts and Design. São Paulo, 2001.
- [4] RODRIGUES, M.H.W.L. & BRAVIANO, Gilson. **The geometry of shadows in perspective: comparing two different approaches.** In CD-Rom of 5th Mathematics and Design International Conference. Blumenau, 2007.
- [5] RODRIGUES, M.H.W.L. & RODRIGUES, D.W.L. “Transpontuais”: Uma Alternativa Dinâmica para o Estudo Interdisciplinar de Conceitos Geométricos. **Revista Educação Gráfica**, Bauru, n. 4, p.51-60, 2000.
- [6] RODRIGUES, M.H.W.L. Geometria Gráfica bidimensional: uma viagem de exploração ao mundo mágico da geometria dinâmica. **Revista Educação Gráfica**, Bauru, n. 9, p.29-37, 2005.
- [7] SOUZA FILHO, E.B.S. O ensino de desenho e o exercício desta linguagem: questões, desafios e reflexões. In Anais do 13º Simpósio Nacional de Geometria Descritiva e Desenho Técnico e II International Conference on Graphics & Engineering for Arts and Design, p.213-223. Ouro Preto, 1998.