A GEOMETRIA DINÂMICA COMO FERRAMENTA DE ESTUDO NA TEORIA DOS ESPAÇOS NORMADOS

Josué Ervin Musial
José Carlos Cifuentes
UFPR - Universidade Federal do Paraná, Departamento de Matemática
ajmusial@gmail.com, jccifa@mat.ufpr.br

Deise Maria Bertholdi Costa
UFPR - Universidade Federal do Paraná, Departamento de Desenho
deise@ufpr.br

RESUMO

A distância Euclidiana não é a única possível no plano, entretanto outras definições de distâncias no plano podem nos levar a algumas surpresas. Para estudar melhor as propriedades dessas diferentes distâncias desenvolvemos um programa de geometria dinâmica, não euclidiana, como uma ferramenta de auxílio à nossa pesquisa.

Palavras-chave: desenvolvimento de software, geometria não Euclidiana plana, distância

ABSTRACT

The Euclidean distance is not the only possible in the plan, however other definitions of distances in the plan can lead us to some surprises. To study the properties of those different distances a program of not Euclidean dynamic geometry was developed as a tool to aid the research.

Keywords: software development, not Euclidean geometry in the plane, distance

1 Introdução

Uma das noções mais importantes em geometria analítica plana, da qual decorrem outras, é a de *distância entre dois pontos.* Da distância Euclidiana tomaremos algumas propriedades mínimas, que serão exigidas de qualquer "distância" num espaço vetorial: *as que determinam uma norma.*

Por simplicidade, restringiremos a nossa análise ao plano munido de uma norma qualquer. Neste trabalho consideraremos, como exemplos de destaque, as normas que provém de um produto interno e as *p*-normas. Ao fazer analogia entre as propriedades da geometria Euclidiana plana com as propriedades das outras geometrias geradas por estas normas surge a necessidade de testar conjecturas e se possível de uma maneira rápida e eficiente.

2 Definindo as Normas Utilizadas

As *p*-normas no plano são definidas da seguinte maneira: Seja p um real maior ou igual a 1, então, para x = (x_1; x_2), define-se

$$||x||_p = (|x_1|^p + |x_2|^p)^{\frac{1}{p}}$$

Para $p = 2$ temos a norma Euclidiana, e para $p = 1$ temos a norma soma.

Por outro lado, todo produto interno determina uma norma. Definindo o produto interno por: <x, y> = $a\ x_1y_1 + b\ (x_1y_2 + x_2y_1) + c\ x_2y_2$, para $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$, com a, b e c satisfazendo $b^2 \leq ac$ e, a e c maiores ou iguais a zero. A norma correspondente é dada por:

$$||x|| = \sqrt{\langle x, x\rangle} = \left(ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

3 Conceito Geral de Circunferência e Ângulo no Plano

Fixada uma norma *||.||* qualquer no plano (que pode ou não provir de um produto interno), a *circunferência* com centro na origem e raio $r > 0$ é definida por

$$C_r = \{x \in \mathbb{R}^2; ||x|| = r\}$$

A noção de *ângulo Euclidiano* pode ser definida, também, a partir da noção de distância Euclidiana. Por exemplo, na geometria grega o quociente entre o comprimento de arco *s* e o raio *r* da circunferência é constante. Esse quociente define o valor do ângulo em radianos. Se chamarmos de θ aquele ângulo, podemos definir a *medida de* $\theta = s/r$ radianos.

O comprimento de um arco *s* de circunferência pode ser calculado através de uma integral, onde ainda a noção de base é a distância entre dois pontos. Se $z(t) = (x(t); y(t))$ com $t \in [a, b]$, então, o comprimento é dado por:

$$l = \int_a^b ||z'(t)||dt.$$

onde ||.|| é a norma Euclidiana.

4 Formulação do Problema Geral

Que condições deve satisfazer uma norma n = ||.|| para que o quociente de um arco de circunferência, calculado através da integral correspondente, ao raio da mesma (ou ao diâmetro) seja constante?

Uma vez satisfeitas essas condições, podemos definir “ângulo" do mesmo modo que no caso Euclidiano substituindo a norma Euclidiana pela norma *n* e, nesse caso, podemos definir o valor de π correspondente: $\pi(n)$; como o quociente do comprimento da circunferência toda ao diâmetro.

O comprimento c_r da circunferência (para as diversas normas) deve ser calculado através da integral dada anteriormente usando a norma correspondente.

Se a norma provém de um produto interno, a circunferência de centro *O* e raio *r* é dada por:

$$C_r = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; ax^2 + 2bxy + cy^2 = r^2\}$$

cujo gráfico é uma elipse centrada em *O*.

Por simplicidade suporemos $b = 0$, (se $b \neq 0$ a elipse é rotada). A simetria nos permite parametrizar o arco no primeiro quadrante por:

$$z(t) = (\tfrac{r}{\sqrt{a}} cost, \tfrac{r}{\sqrt{c}} sent), t \in [0, \tfrac{\pi}{2}]$$

donde o seu comprimento é dado por

$$s(r) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \|z'(t)\| dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a(-\frac{r}{\sqrt{a}} sent)^2 + c(\frac{r}{\sqrt{c}} cost)^2} dt = \frac{r\pi}{2}$$

Daí $c_r = 4s(r) = 2\pi\ r$, donde $\pi(n) = c_r/\ 2r = \pi$ constante que tem o mesmo valor Euclidiano.

O resultado anterior significa que esta forma de medir ângulo a partir da norma usando o argumento Euclidiano coincide com a forma dada pelo produto interno!

Temos também o caso das *p*-normas, que não provém de um produto interno, cuja “circunferência" de centro na origem e raio *r* é dada por:

$$C_r = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; |x|^p + |y|^p = r^p\}$$

Prova-se que $s(r)/r = s(1)$, ou seja, constante para todo r, e aí o valor $\pi(n)$ correspondente, que denotaremos por π_p *é*:

$$\pi_p = \frac{c_1}{2} = \frac{4s(1)}{2} = 2\int_0^1 \left[1 + \left(\frac{t^p}{1 - t^p}\right)^{p-1}\right]^{\frac{1}{p}} dt.$$

5 Abordagem Computacional

O cálculo do valor de π_p, fixado um $p>1$, não foi possível analiticamente, entretanto uma aproximação numérica para este valor foi dada através de um algoritmo que nos possibilitou fazer este cálculo computacionalmente.

Se *p* aumenta indefinidamente o valor de π_p converge para 2, ressaltando ainda que para $p = 1$ temos $\pi_1 = 4$ e para $p = 2$ temos $\pi_2 = \pi$, neste último caso o mesmo valor que no caso Euclidiano.

Um outro resultado importante, e que nos levou a uma surpresa, é mostrado a seguir.

Definindo “reta" como no caso Euclidiano, isto é, como o lugar geométrico dos pontos que satisfazem uma equação do 1º grau $ax + by + c = 0$, e considerando três pontos não colineares no plano e três retas que passam por estes pontos, temos que estas retas delimitam um triângulo. Daí resulta o seguinte:

A soma dos “ângulos internos” de um triângulo qualquer é igual ao valor de $\pi(n)$ correspondente à norma *n* dada.

O teorema Euclidiano da soma dos ângulos internos de um triângulo ser igual a dois ângulos retos é satisfeito, mesmo que a norma não seja a Euclidiana!

6 Construção do Programa de Geometria Dinâmica

O resultado acima pode ser demonstrado utilizando as propriedades de norma, entretanto nem sempre uma demonstração formal é evidente. Surge então aí uma ferramenta que nos auxilie nessa tarefa.

Utilizando a linguagem “Visual Basic 5” desenvolvemos um programa de geometria dinâmica com ferramentas que nos possibilitam construir pontos, retas, circunferências, segmentos e medir ângulos seguindo as definições de cada norma.

O programa possibilita a visualização, faz cálculos numéricos e ainda converte instantaneamente para as diferentes normas um mesmo problema. O que nos permite verificar facilmente se uma conjectura é verdadeira ou falsa. Vejamos dois exemplos:

No primeiro exemplo, consideremos um triângulo inscrito em uma circunferência e que tem um dos lados como sendo um diâmetro desta circunferência, então, a medida do ângulo que se opõe ao diâmetro é igual a $\pi(n)/2$. Nas Figuras 1, 2 e 3, mostradas a seguir, um contra exemplo é dado para a *p*-norma p = 5. Como podemos notar o valor do ângulo oposto ao diâmetro apresenta valores diferentes mostrando que o mesmo não é se quer constante e por conseqüência diferente de $\pi(n)/2$.

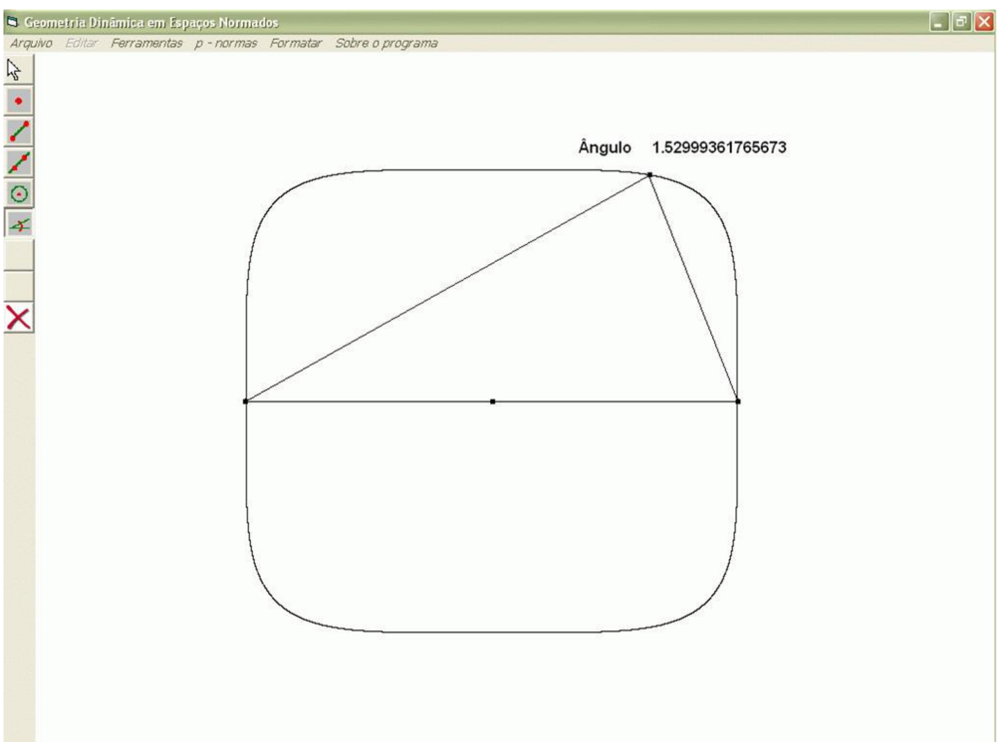

Figura 1:Contra exemplo utilizando o aplicativo desenvolvido.

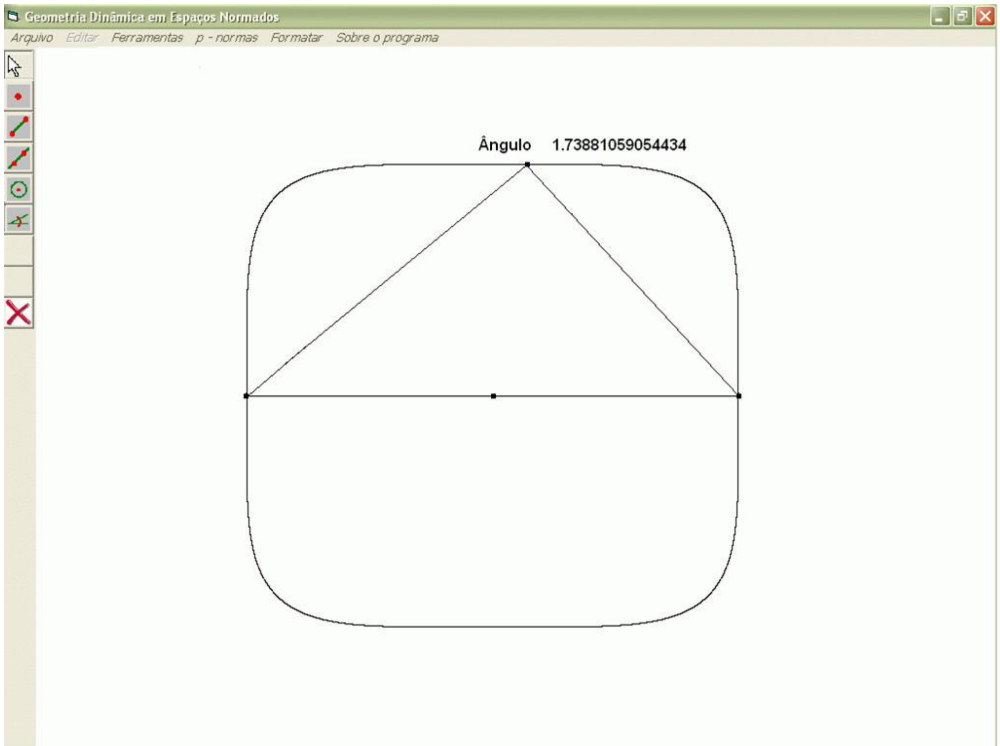

Figura 2:Contra exemplo utilizando o aplicativo desenvolvido.

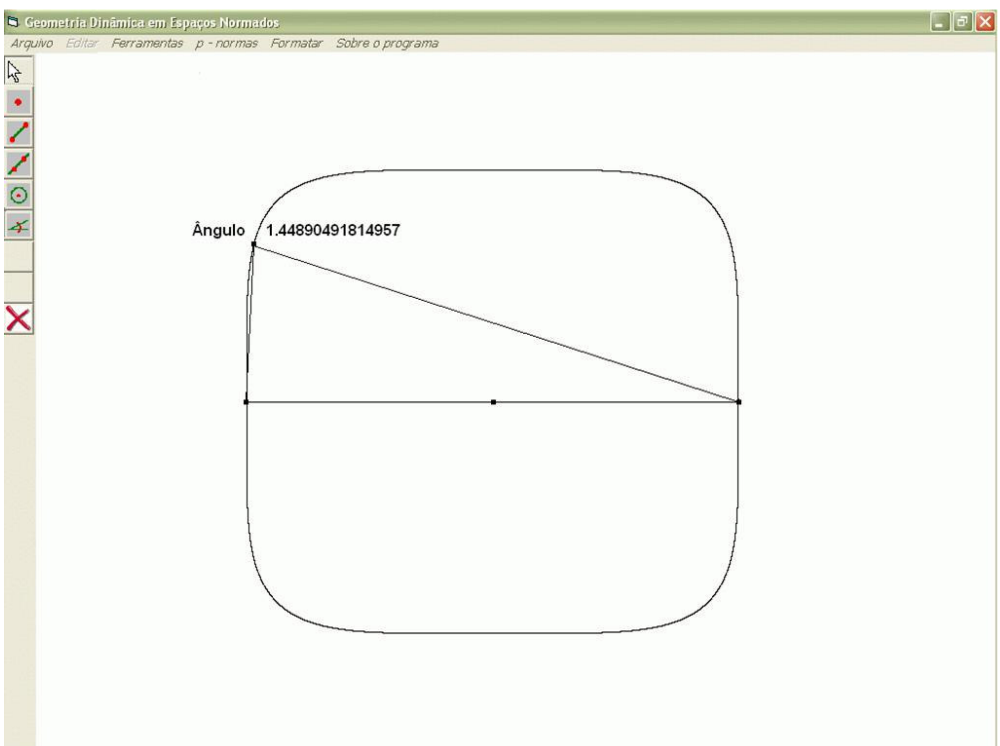

Figura 3:Contra exemplo utilizando o aplicativo desenvolvido.

No segundo exemplo, definindo triângulo isósceles como sendo o triângulo que tem dois lados congruentes, então a medida dos ângulos da base é a mesma. Um contra exemplo é dado para *p*-norma p=1 (Figura 4).

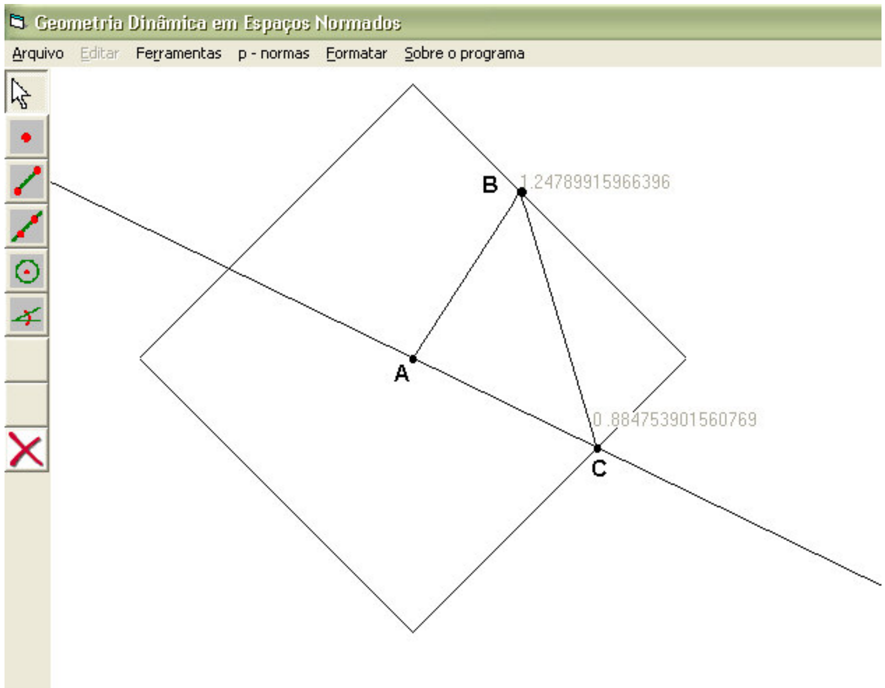

Figura 4:Contra exemplo utilizando o aplicativo desenvolvido.

No triângulo ABC da Figura 4 os segmentos AB e AC têm o mesmo comprimento, pois ambos são raios da circunferência com centro em A. Entretanto, as medidas dos ângulos referentes aos vértices B e C são diferentes.

7 Considerações Finais

O desenvolvimento do software possibilitou grandes avanços na pesquisa e seu aprimoramento não pára e a cada dia torna-se mais prático e útil, em suma, continuamos desenvolvendo a pesquisa buscando novas descobertas.

Agradecimentos

Gostaria de agradecer aos meus orientadores José Carlos Cifuentes e Deise M. B. Costa e à Zizelane Mateus pelo apoio e incentivo, pois sem eles esse trabalho não seria possível.

Referências

[1] GUIDORIZZI, L. H. **Um Curso de Cálculo**, Rio de Janeiro (2000)

[2] LIMA, E. L. **Espaços Métricos**, Rio de Janeiro (1978)

[3] BOULOS, P.; CAMARGO, I. **Geometria Analítica: um tratamento vetorial**, São Paulo (1987)