



A TEORIA DA PERSPECTIVA FUNDAMENTADA PELA GEOMETRIA PROJETIVA

Maria Madalena Santos
Nadja Lisboa da Silveira Guedes
Ufes - Universidade Federal do Espírito Santo, DAU
maria@npd.ufes.br; nlsg@uol.com.br

RESUMO

Este trabalho é uma abordagem da teoria da perspectiva e a influência da geometria projetiva no seu respectivo desenvolvimento, com o objetivo de mostrar que situações de diferentes tipos levaram ao surgimento de um tipo original de geometria. Os gregos, como Apollonius e Pappus, já conheciam as leis da perspectiva: os geômetras ajudavam os desenhistas mostrando como podiam aplicá-las, para criar efeitos naturais nos cenários das tragédias. Concluimos que, apesar dos grandes avanços na geometria projetiva e na perspectiva, estes estiveram sincronizados com os das artes, evidenciando influência direta, como na Renascença, quando somente no século XVIII, os geômetras, finalmente, eliminaram idéias métricas da geometria projetiva e a mesma se solidificou como ciência moderna.

Palavras chave: perspectiva, geometria projetiva, história.

ABSTRACT

The paper approaches the influence of projective geometry in the perspective theory development and it aims to show that different situations had led to the sprouting of an original type of geometry. Greeks, as Apolonius and Pappus, already knew the perspective laws and help the designers, showing to them how to use it creating special effects in tragedy scenarios'. It was concluded that despite the great development in projective geometry and perspective they had been synchronized with the ones of the arts evidencing great influence, as in the Renascence, that only in 18 century the geometers had finally eliminated metrical ideas of projective geometry, that it was considered as modern science.

Key words: perspective, projective geometry, history

1 Introdução

Situações de diferentes tipos levaram ao desenvolvimento de um tipo original de geometria. Os gregos eram bons não somente filósofos e cientistas, mas eram também excelentes nas artes. Sabemos que os gregos tinham familiaridade com as leis da perspectiva. Na representação das grandes tragédias de Sophokles (496-406) para a performance das peças de teatro eram necessários grandes cenários desenhados e pintados, criando efeitos naturais para dar ilusão de que o acontecimento era transplantado para a cena da peça.

Os geômetras ajudavam os desenhistas mostrando como as leis da perspectiva podem ser empregadas para criar efeitos naturais e eram bem familiarizados com a arte de projeção e sabiam que pela projeção de figuras e superfícies, de espaço 3D em superfícies 2D, excelentes efeitos realísticos poderiam ser obtidos. Os maiores expoentes dessa ilusão 3D pela perspectiva e sombra foram dois pintores, Zeuxis e Apollodorus (cerca 400 a.C.), que eram amigos entre si e rivais na Arte.

É difícil dizer qual foi o maior mestre dessa arte. Zeuxis pintou um cacho de uva tão realístico que os pássaros vinham picá-los. Tempos depois Apollodorus convidou Zeuxis para inspecionar sua última pintura, que representava uma paisagem. Zeuxis pediu ao amigo para puxar uma cortina de modo que ele pudesse ver a pintura inteira, mas a cortina era parte da pintura, assim Zeuxis admitiu que Apollodorus o enganara, tal qual ele enganara os pássaros.

Esse conhecimento das leis da perspectiva não é tão surpreendente ao se pensar que os gregos conceberam a elipse, parábola e hipérbole como “seção cônica”. Os gregos sabiam que inclinando um plano com a pintura de um círculo mudava-se a imagem do círculo para uma elipse. Ainda, observando uma elipse de um determinado ângulo pode-se vê-la como um círculo. Assim, mesmo uma parábola, embora se estendendo ao infinito, pode vir a ser em perspectiva um círculo e o mesmo pode ocorrer para a hipérbole (LANCZOS, 1970).

Apollonius de Perga (262-190 a.C.) introduziu todas as curvas de segunda ordem, considerando um cone circular oblíquo que foi cortado por um plano em várias posições. Se o olho ocupar o lugar de vértice do cone, então o fato extraordinário consiste em que todas as seções cônicas são obtidas pelo corte do cone por planos de várias orientações, obtendo-se elipses, parábolas e hipérbolas, que podem, invariavelmente, aparecer como o mesmo círculo (SANTOS, 2001). Esses geômetras foram conscientes de tal fenômeno, porque eram bem familiarizados com a propagação da luz em linha reta. Demócrito e Anaxágoras, incentivados por seu mestre Agatarcus, chegaram a publicar a teoria da Perspectiva aplicada, onde deram a primeiras idéias gráficas estudando os fenômenos luminosos (DORIA, 1981).

Euclides baseou seus problemas ópticos como se raios partissem do olho do observador, utilizando o modelo espacial geométrico do cone, cujos raios, são as geratrizes e o vértice é o olho (SELLENRIEK, 1987). Pappus (290-350 d.C.) provou que o centro do círculo visto inclinado não é o centro da elipse e propôs estudos espaciais da elipse como derivada do círculo. Isto prova que os geômetras gregos tinham a idéia de projeção e seção, que descreveremos a seguir.

2 O Método das Projeções e Seções

Ao contemplar-se um objeto, um sólido, projeta-se de cada um dos seus pontos visíveis um raio, a partir dos olhos do observador, que serão designados como "raios de projeção" dos pontos. Todo o sólido é composto de muitos raios de projeção, dos quais cada qual ou muitos pontos se projetam a partir do olho. Certos pontos não estão em uma reta que contenha o olho, então seus raios de projeção estão no plano. Uma determinada reta também se projetará do olho através de um plano, que se designa "plano de projeção" da reta. Segundo este raciocínio, uma curva será projetada, em geral, através de um cone de raios.

A projeção do sólido pode-se captar ou "cortar" por um plano, no qual o plano secciona cada raio de projeção em um ponto e corta cada plano projetado em uma reta. Obtém-se então no plano como "corte" ou "sombra" de projeção de uma figura em perspectiva, que fornece uma concreta e adequada representação do sólido. As fotografias espaciais de um objeto são em substancial alguma imagem plana em perspectiva do objeto representado (PEDOE, 1963).

Sobre esta arte de projeção, conhecida sob o nome "projeção central", fundamenta-se o ensino da Perspectiva. Todas as outras artes de projeção, que são possíveis na Geometria Descritiva, deixam-se considerar como casos especiais desta arte. Com isto, por exemplo, como na projeção cilíndrica em que os raios de projeção são paralelos, precisa-se pensar apenas no observador a uma distância infinita. Também as sombras, que determinados corpos projetam sobre planos, são Projeções dos Corpos, se elas forem de pontos de luz próprios ou impróprios. O ponto de luz aqui ocupa o lugar do olho do observador.

3 A perspectiva da Arte Renascentista

Um importante aspecto no qual a Arte Renascentista diferencia-se da Arte da Idade Média é o uso da perspectiva na representação plana de objetos do espaço 3D. O arquiteto florentino Filippo Brunelleschi (1377-1446) é famoso por ter dado atenção especial ao tema, mas o primeiro a resolver alguns problemas foi o arquiteto Leon Baptista Alberti (1404-1472) em um tratado de 1435, publicado em 1511, intitulado "Della Pictura".

No tratado, Alberti descreve um método que inventou para determinar a forma e medidas da pintura ou imagem visual de um quadrado de lado dado na horizontal, para uma distância conhecida do observador. A Figura 1 mostra o piso de linhas cruzadas, ou xadrez, que eram coordenadas regulares e facilitavam a plotagem de formas superpostas ao mesmo (SANTOS, 2000). Alberti fez uma combinação prática entre as seções cônicas de Apollonius e o teorema óptico de Pappus sobre a aparência do círculo de uma posição fora do plano do mesmo, com a diferença que não estava interessado no círculo ou na respectiva aparência, mas na aparência da malha.

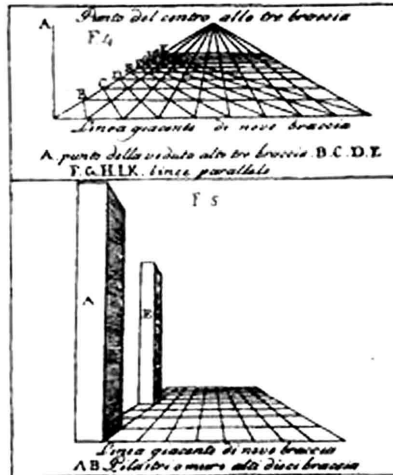


Figura 1: Estudo de Leon Baptista Alberti mostra um piso em xadrez, facilitando a plotagem de formas superpostas ao mesmo.

Um próximo passo no desenvolvimento da perspectiva foi dado pelo célebre pintor de afrescos italiano Piero Della Francesca (1410-1492), que escreveu em “De perspectiva Pingenti” (cerca de 1478) as leis da perspectiva e as aplicações na pintura. Enquanto Alberti concentrou-se na representação no plano, da pintura de figuras no plano-base. Piero interessou-se por problemas mais complicados de pintura de objetos em 3D, vistos de um dado centro de projeção.

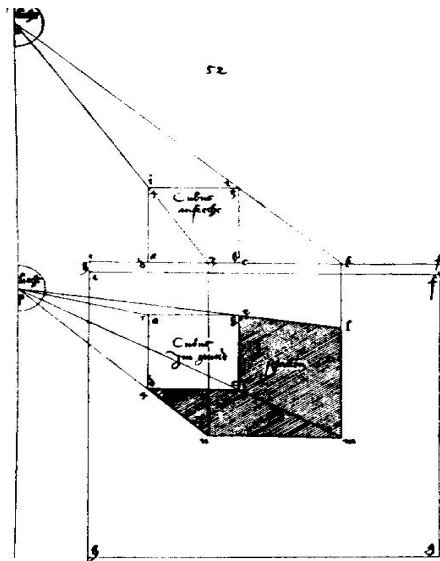


Figura 2:Desenho Típico de Dürer

A conexão entre arte e matemática foi também mostrada no trabalho de Leonardo da Vinci (1452-1519), que escreveu o “Tratado da Pintura” - trabalho sobre perspectiva e que

desapareceu - cujo prefácio tem uma advertência: não deixe de ler meu trabalho quem não for matemático. A mesma combinação de matemática e arte é vista na obra de Albrecht Dürer (1471-1528), cujo livro “Investigação de medidas com círculos e linhas retas do plano e figuras sólidas” (Figura 2) trata do método da seção do cone e da introdução à perspectiva, embora não tenha feito contribuições na teoria da perspectiva ele influenciou várias gerações, tendo construído o perspectógrafo, onde substituiu os saios visuais por fios (FUCKE,1993).

Os artistas da Renascença descobriram a beleza dos espaços abertos e deixaram que estes espaços falassem por si mesmos, pelo método do desenho perspectivo. A operação básica aqui é a projeção, que estabelece uma correspondência biunívoca entre dois planos, partindo da projeção de um ponto, o ponto de um plano projetado como ponto do outro plano. Tal operação não preserva comprimentos ou ângulos, pois estas não são propriedades intrínsecas da geometria projetiva, como se discorre na próxima seção.

4 Fundamentação Geométrica da Perspectiva

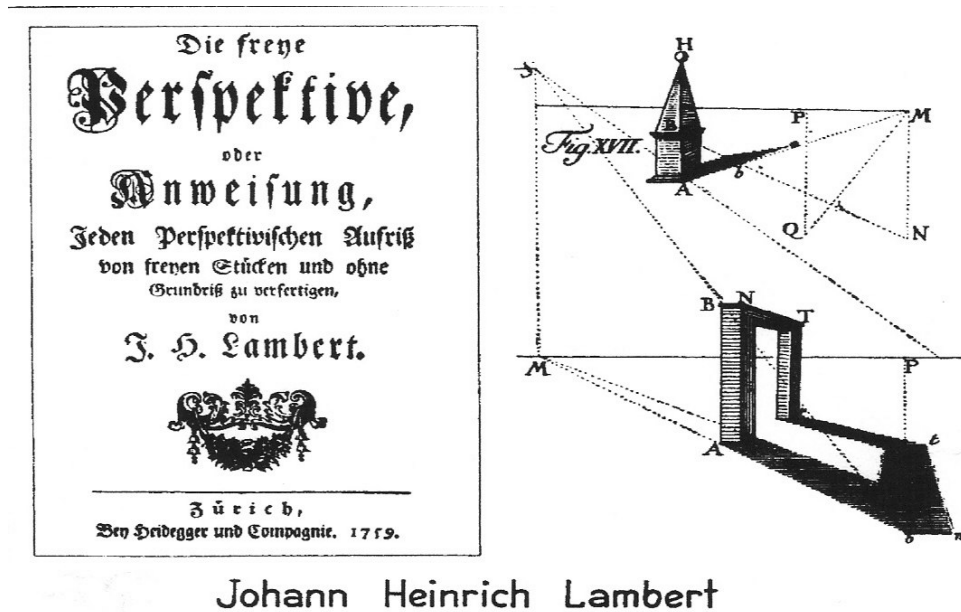
As primeiras pessoas a perceberem que a antiga seção cônica de Apollonius e a nova perspectiva tinham algo em comum foram, na época Barroca, Girard Desargues (1593-1662) e o discípulo Blaise Pascal (1623-1662). Desargues se fixou no estudo das “Cônicas” de Apollonius, no Princípio Contínuo para elaboração de seções cônicas projetivas de Kepler, e efetuou profundas pesquisas sobre seção cônica. Sua primeira publicação foi em 1636 e versa sobre perspectivas, com o título: “Exemple de l'une des manières universelles du Sr. Desargues, Lyonnais, touchant la pratique de la perspective etc...”

Em 1639, publicou um pequeno livro sobre seção cônica, no qual descreve esta como Seção de um Cone com um Plano. Estendeu linhas retas ao infinito em ambas as direções, sem fazer diferença entre uma linha reta e um círculo de raio infinito. Ainda, estendeu planos ao infinito em todas as direções, sendo que a única diferença entre planos paralelos e os demais é que planos paralelos se interceptam em uma reta imprópria.

Posteriormente, Desargues criou o famoso teorema dos triângulos em perspectiva que foi publicado em 1648 por Abraham Bosse (1602-1676) com o título “Manière universelle de S. Desargues, pour pratiquer la perspective”. A direção do trabalho de Desargues não segue o modo antigo, razão pela qual a descoberta foi mal vista pelos contemporâneos e caiu no esquecimento. Somente no século XIX sua pesquisa foi retomada e efetuou-se o grande apogeu da Geometria Projetiva (SANTOS, 2001).

Desargues encontrou em seus discípulos Blaise Pascal (1623-1662) e P. De La Hire (1640-1718), os únicos matemáticos importantes da época que se interessaram pela sua pura e sintética pesquisa orientada. O jovem Pascal, filho de Etienne Pascal, publicou em 1640 um “Essay pour les coniques” que consiste de página única contendo vários teoremas de geometria projetiva, incluindo o hexágono místico de Pascal. De La Hire publicou um livro com o título “Sectiones Conicae” tratando das propriedades harmônicas do quadrilátero, pólo e polar, tangentes e normais, diâmetros conjugados, que são tratados do ponto de vista projetivo.

O primeiro livro didático sobre Perspectiva, utilizando as regras da perspectiva, foi redigido em Berlim pelo professor Johann Heirich Lambert (1728-1777) (Figura 3). O nascimento do pensamento da projeção associou-se ao ensino da perspectiva. Gaspar Monge (1746-1818) baseou-se nos estudos das sombras e perspectiva para elaborar sua Geometria Descritiva. O seu discípulo Jean Victor Poncelet (1788-1867), finalmente, fundamentou a Geometria Projetiva contribuindo para o desenvolvimento da Perspectiva.



Johann Heinrich Lambert

Figura 3: O livro de Lambert

Fonte: Rehbock (1964)

5 Contribuições de Poncelet para a Perspectiva

A ciência da Geometria Projetiva nasceu com a publicação do "traité des propriétés projectives des figures", de Poncelet. As idéias que permaneceram, desde então, provêm do ano 1813.

São obras cujo objetivo se baseia no Princípio de Continuidade, no Teorema sobre as curvas de segunda ordem, assim como para as Superfícies de segunda ordem, que através de métodos de projeção se reduzem em teoremas sobre Círculo e Esferas. Os conteúdos mínimos, cujo significado para o pensamento moderno ficou desde então e estão hoje frente à todas as criações geométricas de qualidade, permanecem na Projeção Central. Isto é, uma propriedade é projetiva, se for invariante na Projeção Central. Logo, a Projeção Central inclui a Projeção Paralela, quando o centro de projeção se afasta ao infinito. Assim, os planos do quadro e plano geometral, no espaço tridimensional, sejam paralelos ou não, possibilitam as quatro homologias: geral, homotetia (perspectiva cônica); afin e translação (perspectiva paralela).

Poncelet dominava não apenas conhecimentos de posição, qualidades descritivas, mas também qualidades de natureza métricas. A diferença entre qualidades métricas e descritivas, em geral, foram possíveis no início do século XIX. Ainda hoje, exige-se que parte da geometria, que é independente de medidas, seja estabelecida em posição recíproca verdadeira. Registra-se a iniciativa de Christian von Staudt (1798-1867), em 1840, de tentar eliminar as idéias métricas da Geometria Projetiva publicando sua Geometria de Posição, considerando que a Geometria Projetiva deve ser fundamentada sobre bases puramente geométricas.

6 Conclusões

Realizou-se uma abordagem ampla do surgimento da teoria da perspectiva e a influência sofrida pelo desenvolvimento da geometria projetiva. Inferiu-se que os grandes avanços, na geometria e perspectiva, estiveram sincronizados com os grandes desenvolvimentos das artes. Na grande maioria dos casos, é impossível encontrar nenhuma influência direta cruzada entre as duas, mas deve-se ressaltar que, enquanto na Renascença os artistas tinham necessidade em seu trabalho de conhecer a perspectiva, quando sempre houve homens que foram grandes especialistas na teoria da perspectiva. Durante a segunda metade do século XVIII, quando os geômetras finalmente eliminaram idéias métricas da geometria projetiva, foi que a mesma se solidificou como ciência moderna.

Referências

- [1] DORIA, Clion. **Desenho e Perspectiva**. Desenho como base fundamental das artes Plásticas e Ciência de Representação. In: **Anais do II Congresso Nacional de Desenho**, Florianópolis, UFSC, 1981
- [2] FUCKE, Rudolf K.Kirch; H.Hickel. **Darstellende Geometrie für Ingenieure**, Köln: Fachbuchverlag, 1993.
- [3] IVINS, William M., **Art & Geometry: A study in space intuitions**, NY: Dover, 1964.
- [4] LANCZOS, Cornelius. **Space through the ages**, London: Academic Press, 1970
- [5] REHBOCK, Fritz. **Darstellende Geometrie**. Berlin: Espring Verlag, 12964
- [6] SANTOS, Maria M., A Expressão Gráfica, história e problemas. In: **Anais do Gráfica2000**, Ouro Preto: ABEG, 06/2000.
- [7] SANTOS, Maria M., A Geometria Projetiva como base da Geometria Descritiva. In: **Anais do Gráfica2001**, São Paulo: ABEG, 06/2001.
- [8] SELLENRIEK, Jörg. **Zirkel und Lineal**, München: Callwey, 1987.